

Darstellungssätze für meßbare lineare Abbildungen auf abstrakten Wienerräumen

von

Matthias Gattinger

aus

Brendlorenzen

1974

1975 # 81

Darstellungssätze für meßbare lineare Abbildungen auf abstrakten Wienerräumen

Der Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg
zur
Erlangung des Doktorgrades

vorgelegt
von
Matthias Gattinger
aus
Brendllorenzen

Als Dissertation genehmigt
von der Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Universität Erlangen-Nürnberg



Tag der mündlichen Prüfung: 13. November 1974

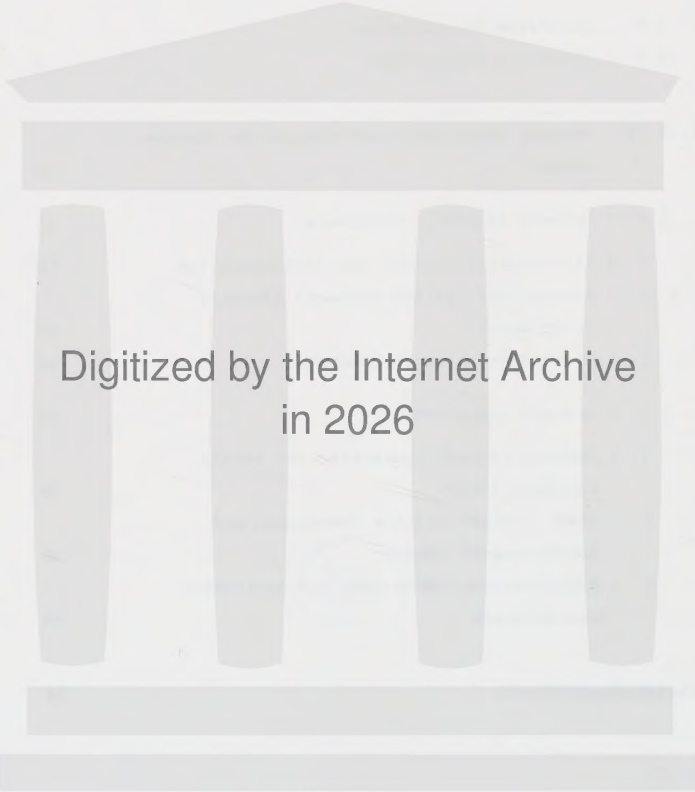
Dekan: Professor Dr. J. Christiansen

Erstberichterstatter: Professor Dr. D. Kölzow

Zweitberichterstatter: Professor Dr. K. Jacobs

INHALTSVERZEICHNIS

Einleitung	i
Bezeichnungen	vii
 Teil I : Abstrakte Wiener Räume	 1
§ 1 : Gauß'sche Zylindermaße	1
§ 2 : Abstrakte Wiener Räume	6
 Teil II : Meßbare Abbildungen auf abstrakten Wiener- räumen	 16
§ 1 : Meßbare lineare Funktionale	16
A : Ein Darstellungssatz vom RIESZschen Typ	16
B : Integraldarstellung meßbarer linearer Funktionale	28
C : Das "Wiener-Closure-Theorem"	32
§ 2 : Meßbare Operatoren	36
A : Meßbare lineare Operatoren auf lokal- konvexen Räumen	36
B : Stark meßbare lineare Operatoren auf lokalkonvexen Räumen	45
C : Rotationsinvariante Maße auf abstrakten Wiener Räumen	54
 Literaturverzeichnis	 64



Digitized by the Internet Archive
in 2026

Einleitung:

Bekanntlich stimmt die Menge der stetigen Linearformen auf einem reellen Hilbertraum H überein mit der Menge der Borelmeßbaren linearen Funktionale auf H (J.P.R.CHRISTENSEN (1)). Daher läßt sich der RIESZsche Darstellungssatz für stetige Linearformen auf einem Hilbertraum in der folgenden Form schreiben:

Sei H ein Hilbertraum mit Skalarprodukt $(\cdot, \cdot)$. Eine reellwertige Abbildung T auf H ist genau dann Borelmeßbar und linear, wenn es ein (eindeutig bestimmtes) Element $z \in H$ gibt, so daß für jedes $h \in H$ gilt: $T(h) = (h, z)$.

Eine Modifikation dieses Satzes für meßbare, im wesentlichen lineare Funktionale auf dem Raum $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ aller reellen Zahlenfolgen wurde 1967 von G.E.SHILOV/FAN DYK.TIN (1) gezeigt (Satz II.1.5.):

Ist l^2 der Hilbertraum aller quadratkonvergenten reellen Zahlenfolgen und μ die "kanonische Normalverteilung" auf $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, so gilt:

Eine reellwertige Abbildung T auf $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ist genau dann ein meßbares, im wesentlichen lineares Funktional auf $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, wenn ein (eindeutig bestimmtes) Element $y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in l^2$ existiert, so daß für μ -fast-alles $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ gilt:

$$T(x) = (x, y)^\sim := \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n .$$

Das Tripel $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, l^2, \mu)$ ist ein spezieller abstrakter Wieneraum. Unter einem abstrakten Wieneraum verstehen wir ein Tripel (W, H, μ) , für welches gilt:

- i) W ist ein lokalkonvexer reeller Hausdorffraum
- ii) H ist ein reeller Hilbertraum, der vermöge einer stetigen linearen injektiven Abbildung Θ als linearer Teilraum von W aufgefaßt werden kann
- iii) μ ist ein Gaußmaß auf den schwachen Borelmengen von W , welches auf den schwach kompakten, konvexen Teilmengen von W konzentriert ist und vermöge Θ von der kanonischen Normalverteilung auf H induziert wird.

Dieser Begriff wurde von L.GROSS (1) für den Spezialfall eines separablen Banachraums W eingeführt. Für den allgemeinen Fall eines lokalkonvexen Raumes W vergleiche R.M.DUDLEY/J.FELOMAN/L.LE CAM (1).

Ein wichtiges Beispiel für einen abstrakten Wieneraum (W, H, μ) ist der klassische Wieneraum: Hier ist W gleich dem Banachraum $\mathcal{C}_0$ aller stetigen, reellwertigen Abbildungen auf $[0, 1]$, die im Nullpunkt verschwinden. Die Norm auf $\mathcal{C}_0$ ist gegeben durch $\|f\| := \sup_{0 \leq x \leq 1} |f(x)|$ ($f \in \mathcal{C}_0$). Der definierende Hilbertraum H ist der Teilraum $\mathcal{C}_1$ der absolutstetigen Funktionen mit quadratintegrierbarer Ableitung, versehen mit dem inneren Produkt $(x, y) := \int_0^1 x'(t)y'(t)dt$. Das Gaußmaß μ ist in diesem Fall das (klassische) Wienermaß auf $\mathcal{C}_0$.

Für den Fall eines abstrakten Wieneraums (B, H, μ) mit einem separablen Banachraum B zeigte J.KUELBS (1) :

Jedes meßbare, im wesentlichen lineare Funktional T auf B läßt sich schreiben in der Form: $T(x) = (x, y)^\sim$ für ein eindeutig bestimmtes Element $y \in H$. Das stochastische innere Produkt $(x, y)^\sim$ ist für μ -fast-alles $x \in B$ definiert und stimmt auf H mit dem dort gegebenen Skalarprodukt überein.

Umgekehrt stellt jede durch ein stochastisches inneres Produkt definierte Abbildung T ein meßbares, im wesentlichen lineares Funktional auf B dar.

In den bisher betrachteten Fällen war der definierende Hilbertraum H stets separabel. Von dieser Tatsache wurde in den Beweisen der Darstellungssätze von G.E.SHILOV/FAN DYK TIN und J.KUELBS wesentlich Gebrauch gemacht. Der Beweis eines Darstellungssatzes von YU.A.ROZANOV (1) für meßbare, im wesentlichen lineare Funktionale auf abstrakten Wienerräumen (W, H, μ) ist nur unter der zusätzlichen Voraussetzung richtig, daß der definierende Hilbertraum H separabel ist. Um uns von

dieser Forderung zu lösen, zeigen wir, daß der definierende Hilbertraum H eines abstrakten Wienertraums isomorph ist zu dem zum Kovarianzfunktional von μ gehörigen reproduzierenden Kernhilbertraum. Diesen Zusammenhang zeigte zuerst G.KALLIANPUR (2) für den Spezialfall, daß W ein separabler Banachraum ist.

Als grundlegend für den Beweis der folgenden Aussagen erweist sich das Lemma II.1.8. :

Sei (W, H, μ) ein abstrakter Wienertraum. Dann gibt es für jedes $h \in H$ ($\equiv H'$) eine μ -fast-sicher eindeutig bestimmte Fortsetzung $\zeta(h)$ von h zu einem meßbaren, im wesentlichen linearen Funktional auf W .

Wir erhalten nun den folgenden Satz (II.1.14.), welcher die Darstellungssätze von G.E.SHILOV/FAN DYK TIN und J.KUELBS verallgemeinert:

Sei (W, H, μ) ein abstrakter Wienertraum und sei $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ ein vollständiges Orthonormalsystem für H . Zu jedem $\alpha \in A$ sei ζ_α die μ -fast-sicher eindeutig bestimmte Fortsetzung von x_α zu einem meßbaren, im wesentlichen linearen Funktional auf W . Ist T ein meßbares, im wesentlichen lineares Funktional auf W , so gibt es ein eindeutig bestimmtes Element $y \in H$ und einen linearen Teilraum V von W mit äußerem Maß 1 und der Eigenschaft:

Für alle $x \in V$ ist die Familie $(\zeta_\alpha(x)(y, x_\alpha))_{\alpha \in A}$

summierbar und $T(x) = \overline{\sum_{\alpha \in A} \zeta_\alpha(x)(y, x_\alpha)}$.

Umgekehrt existiert zu jedem $y \in H$ ein linearer Teilraum V von W mit äußerem Maß 1, so daß für alle $x \in V$ die Familie

$(\zeta_\alpha(x)(y, x_\alpha))_{\alpha \in A}$ summierbar ist, und die Abbildung $x \longmapsto \overline{\sum_{\alpha \in A} \zeta_\alpha(x)(y, x_\alpha)}$ läßt sich zu einem meßbaren,

im wesentlichen linearen Funktional auf W fortsetzen. Diese Fortsetzung ist μ -fast-sicher eindeutig bestimmt.

Insbesondere erhalten wir einen Darstellungssatz für meßbare, im wesentlichen lineare Funktionale auf einem lokalkonvexen Raum W mit einem Gaußmaß μ , welches auf den schwach kompakten, konvexen Teilmengen von W konzentriert ist. Nach einem Satz von R.M.DUDLEY/J.FELDMAN/L.LE CAM (1) gibt es nämlich zu jedem derartigen Paar (W, μ) einen bis auf Isomorphie eindeutig bestimmten Hilbertraum H , so daß das Tripel (W, H, μ) ein abstrakter Wieneraum ist. Für einen reflexiven oder separablen Banachraum W ist das ein Resultat von H.SATO (1).

Mit Hilfe des Darstellungssatzes (II.1.14.) zeigen wir die folgende Integraldarstellung für meßbare, im wesentlichen lineare Funktionale (Satz II.1.16.) :

Ist (W, H, μ) ein abstrakter Wieneraum derart, daß für jedes $w' \in W' \setminus \{0\}$ gilt: $\int_W w'^2(x) \mu(dx) > 0$, so läßt sich W' als

ein linearer Teilraum von W auffassen, und es gilt:

Zu jedem meßbaren, im wesentlichen linearen Funktional T auf W gibt es einen (fast-sicher eindeutig bestimmten) Kern K von $\mathbb{R} \times W$ nach $\mathbb{R}$, so daß für alle $w' \in W'$ gilt:

$$T(w') = \int_W K(w'(x), x) \mu(dx) .$$

Umgekehrt gibt es zu jedem Kern K von $\mathbb{R} \times W$ nach $\mathbb{R}$ ein μ -fast-sicher eindeutig bestimmtes, meßbares, im wesentlichen lineares Funktional T auf W , so daß für alle $w' \in W'$ gilt:

$$T(w') = \int_W K(w'(x), x) \mu(dx) .$$

Als eine weitere Anwendung erhalten wir eine Verallgemeinerung des Wiener-Closure-Theorem (für $\mathcal{L}^2_\mu$) auf abstrakte Wieneräume (W, H, μ) . Diese Verallgemeinerung bewiesen für den Spezialfall eines separablen Banachraums W bereits J.KUELBS und V.MANDREKAR (1), deren Beweisidee wir im wesentlichen verwenden. Eine Übertragung der Wiener-Pitt-Tauber Sätze, die J.KUELBS/V.MANDREKAR (1) im Falle eines separablen Banachraums gezeigt haben, auf den Fall eines belie-

bigen abstrakten Wienertraums ist mit den Techniken von J.KUELBS/
V.MANDREKAR nicht möglich, da dort wesentlich von der Separabilität des definierenden Hilbertraums Gebrauch gemacht wird.

Im zweiten Teil der Arbeit untersuchen wir die Struktur meßbarer, linearer Operatoren auf abstrakten Wienerträumen. G.E.SHILOV/FAN DYK TIN (1) haben gezeigt, daß jedem meßbaren, linearen Operator auf dem abstrakten Wienertraum $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, l^2, \mu)$ eine reelle, abzählbar-unendliche Matrix zugeordnet werden kann, deren Zeilen quadratkonvergent sind. Umgekehrt ist durch jede derartige Matrix ein (fast-sicher eindeutig bestimmter) meßbarer, linearer Operator auf $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ definiert. Wir zeigen die folgende Modifikation dieser Ergebnisse:

Sei (B, H, μ) ein abstrakter Wienertraum mit separablem Banachraum B , und sei T ein meßbarer, linearer Operator von B in einen schwach folgenvollständigen separablen Banachraum B_1 . Ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ein vollständiges Orthonormalsystem für H , welches in B' liegt, so gilt für μ -fast-alles $x \in B$:

$$T(x) = \sum_{i=1}^{\infty} T(x_i)(x_i, x), \text{ und für jedes } f \in B_1' \text{ gilt:}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} (f \circ T(x_i))^2 < \infty.$$

Umgekehrt gilt:

Ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in B_1 , so daß für alle $f \in B_1'$ gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (f(a_n))^2 < \infty, \text{ so ist die Reihe } \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n(x) \text{ unbedingt}$$

konvergent auf einem linearen Teilraum Ω von B mit äußerem Maß 1.

Durch $x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n(x)$ wird ein meßbarer, linearer

Operator von B nach B_1 definiert. (Satz II.2.12.).

Wir beschränken uns hier auf den Fall eines abstrakten Wienertraums (W, H, μ) mit separablem Banachraum W , da wir im allgemeinen Fall eines lokalkonvexen Raumes W mit unseren Techniken nicht zeigen können, daß zwei meßbare, lineare Operatoren auf W schon dann fast-sicher gleich sind, wenn sie auf dem definierenden Hilbertraum H übereinstimmen. Weiter setzen wir voraus, daß der Bildraum B_1 ein

schwach folgenvollständiger separabler Banachraum ist, um die Existenz der auftretenden Summe zu sichern.

Hinreichend dafür, daß ein meßbarer, linearer Operator T auf einem abstrakten Wienertraum (W, H, μ) den definierenden Hilbertraum H in sich abbildet, ist die Bedingung, daß μ und das Transportmaß μ_T von μ unter T äquivalent sind. Ein meßbarer, linearer Operator, welcher diese Bedingung erfüllt, heißt ein stark meßbarer, linearer Operator. Unter Verwendung von Ergebnissen von YU.A. ROZANOV(1) können wir solche Operatoren wie folgt charakterisieren:

Sei (B, H, μ) ein abstrakter Wienertraum mit separablem Banachraum B , welcher als schwach folgenvollständig vorausgesetzt wird. Dann gibt es eine Bijektion zwischen der Menge aller stark meßbaren, linearen Operatoren auf B (modulo μ) und der Menge aller abzählbar-unendlichen, reellen Matrizen A mit der Eigenschaft:

- i) $I - AA^*$ ist eine Hilbert-Schmidt-Matrix, welche 1 nicht als Eigenwert hat¹⁾.
- ii) A hat quadratkonvergente Zeilen und Spalten.

Aus den oben erwähnten Gründen betrachten wir auch in diesem Satz nur den Fall eines abstrakten Wienertraums (W, H, μ) mit separablem Banachraum W , welcher darüberhinaus schwach folgenvollständig ist.

Abschließend untersuchen wir rotationsinvariante Maße auf abstrakten Wienerträumen. Rotationen lassen sich zwar als meßbare Operatoren auffassen, wir zeigen jedoch ohne Ausnutzung dieser Tatsache, daß sich jedes rotationsinvariante Maß darstellen läßt als Überlagerung von Gaußmaßen. Wie in Beispiel I.2.11. gezeigt wird, existiert zu jedem Gelfandschen Raumtripel $(\tilde{\Phi}, H, \tilde{\Phi}')$ ein Gaußmaß μ auf $\tilde{\Phi}'$, so daß $(\tilde{\Phi}', H, \mu)$ ein abstrakter Wienertraum ist. Daher erhalten wir als Korollar den bekannten Satz von Y. UMEMURA (1) über die Darstellung rotationsinvarianter Maße auf Dualräumen nuklearer Räume.

Meinem verehrten Lehrer Prof. Dr. D. Kölzow danke ich für die Anregungen und Ratschläge, mit denen er diese Arbeit unterstützt hat.

1) A^* bezeichnet die zu A adjungierte Matrix, I die Einheitsmatrix.

Bezeichnungen:

Mit $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ bezeichnen wir die Menge der natürlichen Zahlen, mit $\mathbb{R}$ den Körper der reellen Zahlen und mit $\mathbb{Q}$ die Menge der rationalen Zahlen; weiter sei $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$.

Für eine Abbildung f von einer Menge A in eine Menge B und eine Teilmenge A_0 von A sei $\text{Restr}_{A_0} f$ die Restriktion von f auf A_0 .

Mit $\bigwedge$ bzw. $\bigvee$ bezeichnen wir die Quantoren "für alle" bzw. "es existiert"; weiter verwenden wir die logischen Zeichen

$\wedge$ für "und"

$\Rightarrow$ für die logische Implikation und

$\Leftrightarrow$ für die logische Äquivalenz.

Die Symbole $=, \neq, <, \leq, \in, \notin, \subseteq, \not\subseteq, \cap, \cup$ werden in der üblichen Weise verwendet; das Komplement einer Menge A bezüglich einer Menge X bezeichnen wir mit $X \setminus A$ oder mit $\bar{A}$; für die leere Menge schreiben wir $\emptyset$.

Alle auftretenden Vektorräume seien als reell vorausgesetzt. Den topologischen Dualraum eines lokalkonvexen Raumes W bezeichnen wir mit W' , und für das System aller Nullumgebungen schreiben wir $\mathcal{U}(0)$;

$\mathcal{O}_W$ bezeichnet die σ -Algebra der W' -Zylindermengen in W , $\mathcal{L}_W$

die Borel'sche σ -Algebra in W .

Ist T eine reellwertige Abbildung auf einer Menge W , so ist

$$[T \geq 0] = \{x \in W : T(x) \geq 0\}.$$

Für einen Operator T von einem lokalkonvexen Raum W in einen lokalkonvexen Raum V sei T^* der zu T adjungierte Operator von V' nach W' .

Die maßtheoretischen Bezeichnungen und Begriffe werden im Sinne von HALMOS (1) verwendet. Insbesondere bezeichnen wir mit $\mathcal{L}^p = \mathcal{L}^p_\mu$ den Raum aller meßbaren Funktionen f , für welche $|f|^p$ μ -integrierbar ist, und mit $L^p = L^p_\mu$ den Quotientenraum von $\mathcal{L}^p$ modulo μ ($p \geq 1$).

I. Abstrakte Wiener Räume

§1 : Gauß'sche Zylindermaße

Wir bringen zunächst die Definition von Gauß'schen Zylindermaßen und geben einige Eigenschaften an, die später benötigt werden.

Sei im folgenden W ein lokalkonvexer reeller Hausdorffraum. Für eine Teilmenge V' des topologischen Dualraums W' von W bezeichne $\sigma(V')$ die von allen Elementen $v' \in V'$ erzeugte σ -Algebra in W . Ist V' endlich, so heißen die Elemente von $\sigma(V')$ Zylindermengen mit Basis V' . Die Mengenalgebra $\bigcup_{\substack{V' \subseteq W' \\ V' \text{ endlich}}} \sigma(V') =: \mathcal{C}(W, W')$

heißt die Algebra der W' -Zylindermengen in W . Die von der Algebra $\mathcal{C}(W, W')$ erzeugte σ -Algebra bezeichnen wir mit $\mathcal{O}_W$.

1.1. Bemerkung: (MOURIER(1))

Ist W ein separabler Banachraum, so stimmt die σ -Algebra $\mathcal{O}_W$ der W' -Zylindermengen überein mit der Borelschen σ -Algebra auf W .

1.2. Definition:

- a) Unter einem Quasi-Zylindermaß auf W verstehen wir eine Abbildung $\mu : \mathcal{C}(W, W') \longrightarrow \mathbb{R}_+$ mit den folgenden Eigenschaften:
 - (1) $\mu(W) = 1$
 - (2) μ ist additiv auf $\mathcal{C}(W, W')$
 - (3) Für jede endliche Teilmenge $V' \subseteq W'$ gilt: die Restriktion von μ auf $\sigma(V')$ ist σ -additiv
- b) Eine σ -additive Abbildung $\mu : \mathcal{O}_W \longrightarrow \mathbb{R}_+$ heißt Zylindermaß auf W , wenn die Restriktion von μ auf $\mathcal{C}(W, W')$ ein Quasi-Zylindermaß ist.

Wir werden in Kapitel II verwenden, daß der Begriff eines Quasi-zylindermaßes äquivalent ist zum Begriff einer schwachen Verteilung im Sinne von SEGAL:

1.3. Definition: (SEGAL (1))

Unter einer schwachen Verteilung auf $\mathcal{W}$ verstehen wir eine Äquivalenzklasse linearer Abbildungen F von $\mathcal{W}'$ in den linearen Raum $\mathcal{M}(\Omega, \mathcal{F}, P)$ der Zufallsvariablen (modulo Nullfunktionen) über einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, welcher von F abhängig ist. Dabei heißen zwei lineare Abbildungen F_1 und F_2 äquivalent, wenn für je endlich viele Elemente $w_1', \dots, w_n' \in \mathcal{W}'$ gilt: $(F_1(w_1'), \dots, F_1(w_n'))$ und $(F_2(w_1'), \dots, F_2(w_n'))$ haben die gleiche gemeinsame Verteilung.

Eine Abbildung $f : \mathcal{W} \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt Zylinderfunktion, wenn endlich viele Elemente $w_1', \dots, w_n' \in \mathcal{W}'$ und eine Borel-meßbare Funktion

$\tilde{\Phi} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ existieren, so daß für alle $x \in \mathcal{W}$ gilt:

$$f(x) = \tilde{\Phi}(w_1'(x), \dots, w_n'(x)).$$

Sei F ein Vertreter einer schwachen Verteilung $[F]$ und sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ der zu F gehörige Wahrscheinlichkeitsraum. Weiter sei f eine Zylinderfunktion auf $\mathcal{W}$, welche von der Form $f(x) = \tilde{\Phi}(w_1'(x), \dots, w_n'(x))$

ist. Dann ist die Abbildung $\tilde{f} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, welche definiert ist durch die Vorschrift $y \longmapsto \tilde{f}(y) := \tilde{\Phi}(F(w_1')(y), \dots, F(w_n')(y))$

($y \in \Omega$) meßbar bezüglich der σ -Algebra $\mathcal{F}$. Die Verteilung von $\tilde{f}$ unter P stimmt überein mit der Verteilung von f unter dem durch $[F]$ eindeutig bestimmten Quasi-Zylindermaß μ , und wir setzen:

$$\int_{\mathcal{W}} f \, d\mu := \int_{\Omega} \tilde{f} \, dP.$$

Ein Quasi-Zylindermaß μ ist eindeutig bestimmt durch das System seiner endlich-dimensionalen Verteilungen:

$$\mu(\{x \in \mathcal{W} : (w_1'(x), \dots, w_n'(x)) \in D\}) \quad (n \in \mathbb{N}, w_1', \dots, w_n' \in \mathcal{W}', D \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}).$$

Wir werden uns in dieser Arbeit insbesondere mit Gauß'schen Quasi-Zylindermaßen beschäftigen:

1.4. Definition:

- (1) Ein Quasi-Zylindermaß μ auf einem lokalkonvexen Hausdorffraum W heißt Gauß'sch (mit Mittelwert 0), wenn jedes $w' \in W'$ unter μ Gaußverteilt ist (mit Mittelwert 0). Das Dirac-Maß im Nullpunkt wird dabei als ausgeartetes Gaußmaß mit Mittelwert 0 und Varianz 0 zugelassen.
- (2) Ein Zylindermaß μ auf W heißt Gaußmaß (Gauß'sches Zylindermaß) auf W , wenn die Restriktion von μ auf $\mathcal{C}(W, W')$ ein Gauß'sches Quasi-Zylindermaß ist.
- (3) Ist H ein Hilbertraum, und bezeichnet $\|\cdot\|$ die zugehörige Hilbertraum-Norm, so ist die kanonische Normalverteilung $\mathcal{N}$ auf H das durch die folgende Vorschrift eindeutig bestimmte Gauß'sche Quasi-Zylindermaß:
jede stetige Linearform $h' \in H'$ ist unter $\mathcal{N}$ Gaußverteilt mit Mittelwert 0 und Varianz $\|h'\|^2$.

Quasi-Zylindermaße lassen sich durch ihre Fourier-Transformierten kennzeichnen:

1.5. Definition: (PROKHOROV (1))

Unter der Fourier-Transformierten (oder dem charakteristischen Funktional) eines Quasi-Zylindermaßes μ auf einem lokalkonvexen Hausdorffraum W verstehen wir die Funktion $\chi_\mu: W' \rightarrow \mathbb{C}$, welche durch die folgende Vorschrift gegeben ist:

$$\chi_\mu(w') := \int_W \exp(i w'(x)) \mu(dx) :=$$

$$:= \int_{\mathbb{R}} e^{it w'(\mu)}(dt),$$

wobei $w'(\mu)$ das Bildmaß von μ unter der Abbildung w' bezeichnet.

Bemerkung:

- (1) Ein Quasi-Zylindermaß ist durch seine Fourier-Transformierte eindeutig bestimmt.
- (2) Die Fourier-Transformierte χ_μ eines Quasi-Zylindermaßes μ hat die Eigenschaften:
- (i) χ_μ ist positiv-definit, d.h. für $n \in \mathbb{N}$, $w'_1, \dots, w'_n \in W'$ und $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\sum_{k,j=1}^n \chi_\mu(w'_k - w'_j) c_k \overline{c_j} \geq 0.$$

- (ii) Für jedes $w' \in W'$ ist die Abbildung $t \mapsto \chi_\mu(tw')$ stetig ($t \in \mathbb{R}$).
- (iii) $\chi_\mu(0) = 1$.

Umgekehrt ist jedes Funktional χ auf W' , welches die Bedingungen (i), (ii) und (iii) erfüllt, die Fourier-Transformierte eines eindeutig bestimmten Quasi-Zylindermaßes auf W (PROHOROV (1)).

Es gilt nun die folgende Kennzeichnung Gauß'scher Quasi-Zylindermaße:

1.6. Lemma:

Ein Quasi-Zylindermaß μ auf einem lokalkonvexen Hausdorffraum W ist genau dann Gauß'sch (mit Mittelwert 0), wenn die Fourier-Transformierte χ_μ von μ die folgende Form hat:

$$\bigwedge_{w' \in W'} \chi_\mu(w') = \exp(-\sigma^2(w')/2),$$

wobei $\sigma^2(w') := \int_W w'^2(x) \mu(dx)$ die Varianz der durch w' bestimmten eindimensionalen Gaußverteilung ist.

Wir geben nun noch zwei Sätze an, welche wir später benötigen werden, die aber auch für sich von Interesse sind:

1.7. Satz:

Sei μ ein Zylindermaß auf einem lokalkonvexen Hausdorffraum $\mathbb{W}$, und sei $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von (unter μ) Gaußverteilten Zufallsvariablen auf $\mathbb{W}$, welche μ -stochastisch konvergiert. Dann konvergiert die Folge $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ im quadratischen Mittel.

Ein Beweis dieser Aussage findet sich etwa bei ROZANOV (1).

Wir erhalten nun unmittelbar das folgende Korollar:

1.8. Korollar:

Ist μ ein Zylindermaß auf einem lokalkonvexen Hausdorffraum $\mathbb{W}$ und $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Gaußverteilten reellen Zufallsvariablen auf $\mathbb{W}$, welche μ -fast-überall punktweise gegen eine Funktion ξ konvergiert, so ist ξ integrierbar und es gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{W}} \xi_n(x) \mu(dx) = \int_{\mathbb{W}} \xi(x) \mu(dx).$$

1.9. Satz: (Dichotomiesatz)

Zwei Gaußmaße auf einem lokalkonvexen Raum sind entweder äquivalent oder orthogonal¹⁾.

Dieser Satz wurde zuerst von FELDMAN (1) bewiesen.

¹⁾ Zwei Maße μ und ν auf einem Maßbarkeitsbereich $(\Omega, \mathcal{F})$ heißen äquivalent (i.Z. $\mu \sim \nu$), wenn sie dieselben Nullmengen haben; sie heißen orthogonal, wenn eine Menge $F \in \mathcal{F}$ existiert mit $\mu(F) = 0$ und $\nu(F) = 1$.

§2 Abstrakte Wiener Räume

Für die Untersuchung der Struktur meßbarer Abbildungen auf lokalkonvexen Räumen erweist sich der Begriff eines "abstrakten Wiener Raums" als von grundlegender Bedeutung.

Es ist bekannt, daß sich die kanonische Normalverteilung $\mathcal{N}$ auf einem Hilbertraum H genau dann zu einem Zylindermaß fortsetzen läßt, wenn H von endlicher Dimension ist. Im nicht-endlich dimensionalen Fall interessieren wir uns daher für eine Einbettung Θ des Hilbertraums H in einen lokalkonvexen Hausdorffraum W , so daß gilt:

- a) durch $\mathcal{N}$ und Θ wird ein Quasi-Zylindermaß $\tilde{\mathcal{N}}$ auf W bestimmt
- b) durch $\tilde{\mathcal{N}}$ wird ein Zylindermaß μ auf W bestimmt
- c) der Raum W ist 'nicht viel größer' als H , etwa in dem Sinn, daß H (versehen mit der Spurstopologie von W) in W dicht liegt.

Die Forderung a) ist jedenfalls dann erfüllt, wenn die Einbettungsabbildung Θ stetig und linear ist, denn dann gilt für jedes $E \in \mathcal{C}(W, W') : \Theta^{-1}(E) \in \mathcal{C}(H, H')$.

L.GROSS (1) hat gezeigt, daß für separable Hilberträume auch die Bedingungen b) und c) erfüllbar sind:

Ist H ein separabler Hilbertraum, und bezeichnet B die Vervollständigung von H bezüglich einer meßbaren Norm¹⁾, so läßt sich das Transportmaß der kanonischen Normalverteilung auf H unter der natürlichen Einbettungsabbildung zu einem σ -additiven Borelmaß (also zu einem Zylindermaß) auf B fortsetzen.

Umgekehrt zeigten H.SATO (1) und J.KUELBS (1), daß jedes Gauß'sche Zylindermaß auf einem separablen Banachraum induziert wird von der kanonischen Normalverteilung auf einem separablen Hilbertraum, der im Banachraum dicht enthalten ist.

¹⁾ Zur Definition einer meßbaren Norm vgl. L.GROSS (1)

Von DUDLEY/FELDMAN/LE CAM stammt die folgende Verallgemeinerung dieses Resultats:

2.1. Satz: (DUDLEY/FELDMAN/LE CAM (1), Theorem 4)

Sei $\mathcal{W}$ ein lokalkonvexer Hausdorffraum, $\mathcal{W}'$ sein topologischer Dualraum, und sei μ ein Gaußmaß (mit Mittelwert 0) auf den schwachen Borelmengen in $\mathcal{W}$, welches die folgende Bedingung erfüllt:

(*) $\sup \{ \mu(K) : K \text{ konvex und schwach kompakt} \} = 1$.
Dann existieren ein Hilbertraum H und eine stetige lineare Abbildung Θ von H in $\mathcal{W}$, so daß – wenn $\mathcal{N}$ die kanonische Normalverteilung auf H bezeichnet – für jede Menge $E \in \mathcal{C}(\mathcal{W}, \mathcal{W}')$ gilt: $\mu(E) = \mathcal{N}(\Theta^{-1}(E))$.

Wir bringen eine Beweisskizze dieses Satzes, da wir auf die Konstruktion des Hilbertraums H noch näher eingehen werden.

Beweisskizze zu Satz 2.1.: (DUDLEY/FELDMAN/LE CAM (1))

Sei $\Psi: \mathcal{L}_\mu^2 \longrightarrow L_\mu^2$ die kanonische Abbildung, die jedem $f \in \mathcal{L}_\mu^2$ seine μ -Äquivalenzklasse $[f]$ zuordnet. Sei H der Abschluß von $\Psi(\mathcal{W}')$ in L_μ^2 . H ist ein Hilbertraum, und aus der Bedingung (*) ergibt sich, daß $\Psi|_{\mathcal{W}'}$ eine stetige lineare Abbildung von $\mathcal{W}'$ (versehen mit der Mackey-Topologie) in den Raum H ist. Die zu $\Psi|_{\mathcal{W}'}$ transponierte Abbildung kann als Abbildung von $H \cong H'$ in $\mathcal{W}$ aufgefaßt werden und wird mit Θ bezeichnet: zu jedem Element $\tilde{h} \in H$ gibt es genau einen Punkt $\Theta(\tilde{h}) \in \mathcal{W}$, so daß für jedes $w' \in \mathcal{W}'$ gilt:

$w'(\Theta(\tilde{h})) = ([w'], \tilde{h}) := \int_{\mathcal{W}} w'(x)h(x)\mu(dx)$, wobei $h \in \tilde{h}$ beliebig gewählt ist. Die Abbildung Θ ist stetig und linear von H nach $\mathcal{W}$ und führt die Normalverteilung $\mathcal{N}$ auf H in das Gaußmaß μ auf $\mathcal{W}$ über.

Definition:

Unter einem abstrakten Wienerraum verstehen wir ein Tripel $(\mathcal{W}, H, \mu)$, für welches gilt:

- i) W ist ein lokalkonvexer reeller Hausdorffraum
- ii) H ist ein reeller Hilbertraum, der vermöge einer stetigen linearen injektiven Abbildung Θ als linearer Teilraum von W aufgefaßt werden kann
- iii) μ ist ein Gaußmaß auf den schwachen Borelmengen von W , welches die Bedingung $(*)$ von Satz 2.1. erfüllt und vermöge Θ von der kanonischen Normalverteilung auf H induziert wird.

Zwei abstrakte Wiener Räume (W_1, H_1, μ_1) und (W_2, H_2, μ_2) heißen äquivalent und werden identifiziert, wenn ein linearer Homöomorphismus ψ von W_1 auf W_2 existiert, der H_1 isometrisch auf H_2 abbildet (μ_2 ist dann das Bildmaß von μ_1 unter der Abbildung ψ).

2.2. Bemerkungen zu Satz 2.1.:

Wir verwenden die Bezeichnungen in Satz 2.1. und der Beweisskizze.

- (1) Die Bedingung $(*)$ sichert die Stetigkeit der Abbildung $\psi|_{W_1}$. Sie ist erfüllt, wenn W ein separabler Banachraum ist.
- (2) Der Raum $\Theta(H)$ ist genau dann dicht in W enthalten, wenn kein echter abgeschlossener Teilraum von W volles μ -Maß hat. Das ist genau dann der Fall, wenn μ der Varianzbedingung (VB) genügt:

$$(VB) \quad \bigwedge_{W' \in W' \setminus \{0\}} \sigma^2(W') = \int_W W'^2(x) \mu(dx) > 0;$$

W' kann dann als ein linearer Teilraum von H und somit auch von W aufgefaßt werden.

- (3) Der Hilbertraum H ist im allgemeinen nicht separabel.
- (4) Da Θ injektiv ist, kann H als ein algebraischer Teilraum von W und Θ als die kanonische Einbettungsabbildung von H in W aufgefaßt werden. Wegen der Stetigkeit von Θ ist die Hilbertraum-Topologie auf H feiner als die von W auf H induzierte Topologie. Somit gilt für jede Menge $E \in \mathcal{C}(W, W')$: $E \cap H \in \mathcal{C}(H, H')$ und $\mu(E) = \mu(E \cap H)$.
- (5) Der definierende Hilbertraum H hat äußeres μ -Maß 0.

2.3. Beispiele für abstrakte Wiener Räume:

- (1) Der klassische Wiener Raum

Mit $\mathcal{C}_0 = \mathcal{C}_0([0, 1])$ bezeichnen wir den Raum aller stetigen, reellen Funktionen auf $[0, 1]$, welche im Nullpunkt verschwin-

den. Mit der Norm der gleichmäßigen Konvergenz ist $\mathcal{C}_0([0,1])$ ein separabler Banachraum. Sei μ das Wienermaß auf $\mathcal{C}_0$. Es ist durch die folgende Vorschrift bestimmt: für $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n \leq 1$ und $-\infty \leq \alpha_i < \beta_i < +\infty$ ($i=1, \dots, n$) ist

$$\mu(\{f \in \mathcal{C}_0 : \alpha_i < f(t_i) \leq \beta_i, i=1, \dots, n\}) =$$

$$((2\pi)^n \prod_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}))^{-1/2} \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \dots \int_{\alpha_n}^{\beta_n} g(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n,$$

$$\text{mit } g(x_1, \dots, x_n) = \exp\left(-\sum_{i=1}^n \frac{(x_i - x_{i-1})^2}{2(t_i - t_{i-1})}\right).$$

Sei $\mathcal{C}^1 := \{f \in \mathcal{C}_0 : f \text{ ist absolutstetig mit quadratintegrierbarer Ableitung}\}$

versehen mit dem Skalarprodukt :

$$(f, g) := \int_0^1 f'(t)g'(t)dt. (\mathcal{C}^1, (.,.)) \text{ ist ein Hilbert-}$$

raum, und $(\mathcal{C}_0, \mathcal{C}^1, \mu)$ ist ein abstrakter Wienerraum.

(2) Der abstrakte Wienerraum im Sinne von L.GROSS:

Das Beispiel (1) ist ein Spezialfall eines abstrakten Wienerraums im Sinne von L.GROSS:

Sei B ein separabler Banachraum mit Gaußmaß μ ; dann existieren ein (separabler) Hilbertraum H und eine meßbare Norm $\|.\|_m$ auf H , so daß gilt:

(i) (B, H, μ) ist ein abstrakter Wienerraum

(ii) B ist die Vervollständigung von H unter $\|.\|_m$ (vgl. GROSS (1), SATO (1)).

In diesem Fall erfüllt das Gaußmaß μ die Varianzbedingung (VB) (vgl. Bemerkung 2.2.(6)) und somit gilt:

$B' \subseteq H' \subseteq H \subseteq B$; weiter gilt: B' liegt dicht in H' , H liegt dicht in B , und B' ist ein dichter Teilraum von B (vgl. GROSS (1)).

(3) Sei $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ der Raum aller reellen Zahlenfolgen (versehen mit der Produkttopologie).

Mit σ_ν bezeichnen wir die ν -te Koordinatenabbildung:

$$\begin{array}{ccc} \sigma_\nu : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} & \longmapsto & x_\nu \end{array} \quad (\nu \in \mathbb{N}),$$

mit $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die "kanonische Basis" :

$$\sigma_m(e_n) = \begin{cases} 1 & : n = m \\ 0 & : n \neq m \end{cases} \quad (n, m \in \mathbb{N}).$$

Der Raum $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ist ein nuklearer Frechetraum, welcher nicht normierbar ist.

Sei μ die "kanonische Normalverteilung" auf $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Sie ist durch die beiden folgenden Bedingungen gekennzeichnet:

- (i) Die Familie $(\sigma_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ ist unter μ unabhängig verteilt.
- (ii) Jedes σ_ν ($\nu \in \mathbb{N}$) ist unter μ Gaußverteilt mit Mittelwert 0 und Varianz 1.

Sei l^2 der Raum aller quadratkonvergenten reellen Zahlenfolgen:

$$l^2 = \left\{ x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 < \infty \right\}.$$

Mit dem Skalarprodukt $(x, y) := \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$ ($x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$,

$y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in l^2$) ist l^2 ein reeller Hilbertraum.

Das Tripel $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, l^2, \mu)$ ist ein abstrakter Wienertraum (vgl. GÄTTINGER (1), III.3.4.).

Ein weiteres Beispiel (Gelfand'sches Raumtripel) werden wir am Ende dieses Paragraphen bringen. Dazu benötigen wir zunächst die Darstellung des definierenden Hilbertraums als "reproduzierenden Kernhilbertraum":

2.4. Definition:

Seien T eine nicht-leere Menge, X ein Vektorraum reeller Funktionen auf T und sei $\mathcal{A}$ die von den Abbildungen $x \mapsto x(t) \quad (t \in T)$ erzeugte σ -Algebra. Weiter sei μ ein Gaußmaß auf $\mathcal{A}$ mit Mittelwert 0. Unter dem Kovarianzkern von μ verstehen wir die Abbildung $R : T \times T \longrightarrow \mathbb{R}$, welche definiert ist durch $R(s, t) := \int_X x(t)x(s) \mu(dx)$.

2.5. Lemma: (ARONSZAJN (1))

Unter den Voraussetzungen von Definition 2.4. existiert genau ein Hilbertraum $H(R)$ mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$, so daß gilt:

- (1) $H(R)$ besteht aus reellen Funktionen auf T
- (2) Für jedes $t \in T$ ist $R(\cdot, t) \in H(R)$
- (3) Für jedes $k \in H(R)$ ist $\langle k, R(\cdot, t) \rangle = k(t)$ (Reproduzierungseigenschaft)

Der Hilbertraum $H(R)$ heißt reproduzierender Kernhilbertraum (zum Kovarianzkern R).

2.6. Lemma:

Sei (W, H, μ) ein abstrakter Wienertraum. Dann ist der definierende Hilbertraum H als reproduzierender Kernhilbertraum realisierbar.

Beweis:

Die Bezeichnungen werden aus 2.1. und 2.4. übernommen. Wir setzen $T = W'$ und fassen $X = W$ (nach Einbettung in W'') auf als Vektorraum reeller Funktionen auf W' . Die σ -Algebra $\mathcal{A}$ stimmt dann überein mit der σ -Algebra $\mathcal{O}_W$ der W' -Zylindermengen in W . Der Kovarianzkern R des Gaußmaßes μ ist gegeben durch die Vorschrift:

$$R(x', y') := \int_W x'(x) y'(x) \mu(dx) \quad (x', y' \in W')$$

Wir zeigen: der definierende Hilbertraum H erfüllt die Bedingungen (1) - (3) des Lemmas 2.5. und stimmt somit mit dem reproduzierenden Kernhilbertraum $H(R)$ überein.

- (1) Jedes Element von H kann vermöge der Einbettungsabbildung θ als Element von $\mathcal{W}$ und somit als Element von $\mathcal{W}''$ aufgefaßt werden. Also ist H ein Hilbertraum reeller Funktionen auf $\mathcal{W}' = T$.
- (2) Mit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ bezeichnen wir das Skalarprodukt auf H (bzw. H' , bzw. ΘH). Seien $x', y' \in \mathcal{W}'$. Da $x' \circ \theta$ und $y' \circ \theta$ Elemente von H' sind, gibt es eindeutig bestimmte Elemente $x, y \in H$ derart, daß für jedes $h \in H$ gilt:
 $x' \circ \theta(h) = \langle h, x \rangle$ und $y' \circ \theta(h) = \langle h, y \rangle$. Da μ von der kanonischen Normalverteilung $\mathcal{N}$ auf H induziert wird, folgt aus der Integraltransformationsformel für Zylinderfunktionen:

$$R(x', y') = \int_{\mathcal{W}} x'(\omega) y'(\omega) \mu(d\omega) = \int_H x' \circ \theta(h) y' \circ \theta(h) \mathcal{N}(dh) =$$

$$= \langle x' \circ \theta, y' \circ \theta \rangle = x' \circ \theta(y) = (\theta y)(x') \quad (\text{nach Einbettung von } \mathcal{W} \text{ in } \mathcal{W}'').$$
Somit gilt für jedes $y' \in \mathcal{W}'$: $R(\cdot, y') = \theta y \in \Theta H \equiv H$.
- (3) Für $y' \in \mathcal{W}'$ sei $y \in H$ wie in (2) gewählt. Für $x \in H$ gilt dann (nach Einbettung von $\mathcal{W}$ in $\mathcal{W}''$): $\theta x(y') = y'(\theta x) = y' \circ \theta(x) = \langle y, x \rangle = \langle x, y \rangle = \langle \theta x, \theta y \rangle = \langle \theta x, R(\cdot, y') \rangle$, also nach Identifikation von H mit ΘH : $x(y') = \langle x, R(\cdot, y') \rangle$.

2.7. Korollar :

Der definierende Hilbertraum zu einem Paar $(\mathcal{W}, \mu)$ ist bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.

Bemerkung: Wir werden im folgenden stets annehmen, daß der definierende Hilbertraum wie im Beweis des Satzes 2.1. konstruiert ist.

Es stehen uns nun die folgenden Ergebnisse von KALLIANPUR/NADKARNI (1) und CAMBANIS/RAJPUT (1) zur Verfügung:

2.8. Satz (Null-Fins-Gesetz; vgl. KALLIANPUR/NADKARNI (1), Th. 2.2. und Cor. 2.1.):

Sei $(\mathcal{W}, H, \mu)$ ein abstrakter Wienertraum und sei g eine $\mathcal{O}_{\mathcal{W}}$ -meßbare reelle Funktion auf $\mathcal{W}$, so daß für jedes Element h des definierenden Hilbertraums H gilt: $g(x+h) = g(x) \quad (x \in \mathcal{W})$. Dann ist g μ -fast-überall konstant.

2.9. Korollar:

Sei $(\mathcal{W}, H, \mu)$ ein abstrakter Wienertraum und sei A eine meßbare Teilmenge von $\mathcal{W}$, welche invariant ist unter allen Translationen längs Elementen von H . Dann gilt: $\mu(A) \in \{0, 1\}$.

2.10. Satz: (vgl. CAMBANIS/RADPUT (1), p.311; ROZANOV(1), chap.IV)

Sei (W, H, μ) ein abstrakter Wienertraum. Für $y \in W$ bezeichne μ_y das Transportmaß von μ unter der (meßbaren) Abbildung $x \longmapsto x + y$. Dann gilt:
 $H = \{x \in W : \mu_x \text{ und } \mu \text{ sind äquivalente Maße}\}.$

2.11. Beispiel: (Gelfand'sche Raumtripel)

Sei Φ ein nuklearer Hausdorffraum¹⁾ dessen Topologie von einer Folge Hilbertscher Halbnormen erzeugt wird, und sei Φ' der topologische Dualraum von Φ . Da Φ reflexiv ist, stimmt die Algebra der Φ'' -Zylindermengen in Φ' mit der von allen Mengen der Form $\{x \in \Phi' : (x(\varphi_1), \dots, x(\varphi_n)) \in \Gamma\}$ ($n \in \mathbb{N}$, $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in \Phi$, $\Gamma \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^{\mathbb{N}}$) erzeugten Mengenalgebra in Φ' überein.

Wir setzen voraus, daß eine stetige Hilbertsche Norm $\|\cdot\|$ auf Φ existiert. Die Vervollständigung H von Φ bezüglich $\|\cdot\|$ ist ein Hilbertraum, und es gilt: $\Phi \subseteq H \subseteq H' \subseteq \Phi'$, wobei alle Inklusionen dicht sind. Das Tripel (Φ, H, Φ') ist also ein Gelfandsches Raumtripel (vgl. GELFAND/VILENKIN (1)).

Wir zeigen:

Es gibt ein Gaußmaß μ auf Φ' , so daß (Φ', H, μ) ein abstrakter Wienertraum ist.

Sei $\mathcal{M}$ die kanonische Normalverteilung auf H . Nach Lemma 1.6. gilt für die Fourier-Transformierte $\chi_{\mathcal{M}}$ von $\mathcal{M}$:

$$\chi_{\mathcal{M}}(x) = \exp\left(-\frac{1}{2} \|x\|^2\right) \quad (x \in H \subseteq H').$$

Die Restriktion χ von $\chi_{\mathcal{M}}$ auf Φ erfüllt die Bedingungen (i), (ii) und (iii) aus Definition 1.5. und ist somit die Fourier-Transformierte eines (eindeutig bestimmten) Gauß'schen Quasi-Zylindermaßes auf Φ' . Da die Abbildung χ stetig ist und Φ' der Dualraum eines nuklearen Raumes ist, gibt es genau ein Zylindermaß μ auf Φ' , dessen Fourier-Transformierte mit χ übereinstimmt (vgl. UMEMURA (1), §9, §12 und §17).

¹⁾ Zur Definition eines nuklearen Raumes vgl. UMEMURA (1). Bei GELFAND/VILENKIN (1) wird ein nuklearer Raum stets als ein abzählbarer Hilbertscher Raum vorausgesetzt.

Da $\bar{\Phi}$ abzählbar Hilbertsch ist, stimmt die σ -Algebra der schwachen Borelmengen in $\bar{\Phi}'$ mit der σ -Algebra der $\bar{\Phi}''$ -Zylindermengen in $\bar{\Phi}'$ überein (vgl. PROKHOROV (1), p.409). Somit ist μ ein Gaußmaß (mit Mittelwert 0) auf den schwachen Borelmengen von $\bar{\Phi}'$.

Aus UMEMURA §§10-12 folgt: zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es eine konvexe, schwach kompakte Teilmenge C_ε von $\bar{\Phi}'$, so daß für jede Menge $A \in \mathcal{C}(\bar{\Phi}', \bar{\Phi}'')$ gilt: $A \cap C_\varepsilon = \emptyset \implies \mu(A) < \varepsilon$, und daher gilt nach PROKHOROV (1), p.411:

zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es eine konvexe, schwach kompakte Teilmenge C_ε von $\bar{\Phi}'$ ($C_\varepsilon \in \mathcal{O}_{\bar{\Phi}'}$) mit:

$$A \in \mathcal{O}_{\bar{\Phi}'} \wedge A \cap C_\varepsilon = \emptyset \implies \mu(A) < \varepsilon.$$

Das Gaußmaß μ erfüllt also die Ausschöpfungseigenschaft (*) von Satz 2.1.. Somit ist das Tripel $(\bar{\Phi}', H, \mu)$ ein abstrakter Wienertraum.

Umgekehrt gilt: (KALLIANPUR (1), p.206)

Ist μ ein Gaußmaß mit stetigem Kovarianzkern R auf dem topologischen Dualraum $\bar{\Phi}'$ eines abzählbar Hilbertschen, nuklearen Hausdorffraumes $\bar{\Phi}$, so gilt für den durch R definierten reproduzierenden Kernhilbertraum $H(R)$: $\bar{\Phi} \subseteq H(R) \subseteq \bar{\Phi}'$.

Das Tripel $(\bar{\Phi}, H(R), \bar{\Phi}')$ ist also ein Gelfandsches Raumtripel, und das Gaußmaß μ wird von der kanonischen Normalverteilung auf $H(R)$ induziert. Wie oben sieht man, daß μ die Ausschöpfungseigenschaft (*) erfüllt; daher ist $(\bar{\Phi}', H(R), \mu)$ ein abstrakter Wienertraum.

Bemerkung:

Verzichten wir auf die Forderung, daß der nukleare Raum $\bar{\Phi}$ abzählbar Hilbertsch ist, und verlangen nur die Vollständigkeit von $\bar{\Phi}$, so gilt:

- $\bar{\Phi}$ ist reflexiv
- $\bar{\Phi} \subseteq H \subseteq \bar{\Phi}'$, wobei alle Inklusionen dicht sind
- Es gibt ein Gaußmaß μ auf $\bar{\Phi}'$, welches von der kanonischen Normalverteilung $\mathcal{N}$ auf H induziert wird, d.h. für jedes $E \in \mathcal{C}(\bar{\Phi}', \bar{\Phi}'')$ ist $\mu(E) = \mathcal{N}(E \cap H)$.

Anhang:

Wir zitieren einen Satz von J.P.R.CHRISTENSEN, der es uns ermöglicht, von der Meßbarkeit eines linearen Funktionals auf einem Hilbertraum auf die Stetigkeit zu schließen.

2.12. Satz: (CHRISTENSEN (1), Theorem 2)

Sei G eine abelsche topologische Gruppe, welche vollständig metrisierbar ist. Sei weiter H eine abelsche topologische Gruppe, die σ -beschränkt¹⁾ ist bezüglich der durch die Gruppenoperationen definierten uniformen Struktur. Dann ist jeder universell-meßbare Homomorphismus von G nach H stetig.

2.13. Korollar:

Sei H ein reeller Hilbertraum und sei $\mathcal{O}_H$ die σ -Algebra der H -Zylindermengen in H . Dann ist jede $\mathcal{O}_H$ -meßbare lineare Abbildung von H nach $\mathbb{R}$ stetig.

Beweis:

Jede $\mathcal{O}_H$ -meßbare lineare Abbildung von H in den σ -beschränkten Raum $\mathbb{R}$ ist universell meßbar.

¹⁾ Ein uniformer Raum $(M, \mathcal{U})$ heißt σ -beschränkt, wenn zu jedem $U \in \mathcal{U}$ eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in M existiert, so daß gilt:

$$M = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{y \in M : (x_n, y) \in U\}.$$

II. Meßbare Abbildungen auf abstrakten Wienerräumen

§1 : Meßbare lineare Funktionale

In diesem Abschnitt zeigen wir Darstellungssätze für meßbare, im wesentlichen lineare Funktionale auf abstrakten Wienerräumen. Zunächst bringen wir einen Darstellungssatz vom RIESZschen Typ. Wir sehen, daß jedes meßbare, im wesentlichen lineare Funktional auf einem abstrakten Wienerraum schon durch seine Werte auf dem definierenden Hilbertraum fast-sicher eindeutig bestimmt ist. Der Satz verallgemeinert Darstellungssätze, welche von SHILOV/FAN DYK TIN für den Fall meßbarer, im wesentlichen linearer Funktionale auf dem Raum $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ aller reellen Zahlenfolgen und von J.KUELBS für den Fall eines abstrakten Wienerraums im Sinne von L.GROSS gezeigt wurden.

Anschließend werden wir zeigen, daß es eine Bijektion gibt zwischen der Klasse aller meßbaren, im wesentlichen linearen Funktionale (modulo Nullfunktionen) und einer Klasse von Integralkernen.

Als Anwendung bringen wir eine Verallgemeinerung des "Wiener-Closure-Theorems" (KUELBS/MANDREKAR (1)).

A : Ein Darstellungssatz vom RIESZschen Typ

Zunächst wollen wir an den klassischen Darstellungssatz von RIESZ erinnern:

1.1. Satz:

Sei H ein (reeller) Hilbertraum mit Skalarprodukt $(\cdot, \cdot)$. Dann gilt: Eine Abbildung $T : H \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann stetig und linear, wenn gilt: Es gibt ein Element $z \in H$, so daß jedes $h \in H$ gilt: $T(h) = (h, z)$. Dieses Element z ist eindeutig bestimmt.

1.2. Bemerkungen:

- a) Da nach Satz I.2.13. ein lineares Funktional T von H nach $\mathbb{R}$ genau dann stetig ist, wenn es Borel-meßbar ist, läßt sich der Satz 1.1. auch folgendermaßen formulieren: T ist Borelmeßbar und linear genau dann, wenn ein (eindeutig bestimmtes) Element $z \in H$ existiert, so daß für jedes $h \in H$ gilt: $T(z) = (h, z)$.
- b) Ist $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ ein vollständiges Orthonormalsystem in H , so kann jedes Borel-meßbare lineare Funktional T auf H geschrieben werden in der Form:
- $$T(h) = \sum_{\alpha \in A} T(x_\alpha) (x_\alpha, h) \quad (h \in H).$$

Wir bringen nun eine Modifikation dieses Satzes für meßbare, im wesentlichen lineare Funktionale auf lokalkonvexen Hausdorffräumen.

1.3. Definition:

Sei W ein lokalkonvexer Hausdorffraum, auf welchem ein Gaußmaß μ existiert, das die Ausschöpfungseigenschaft (*) erfüllt (vgl. I.2.1.). Unter einem meßbaren, im wesentlichen linearen Funktional T auf W verstehen wir eine Abbildung T von $D(T) \subseteq W$ nach $\mathbb{R}$, für welche gilt:

- (1) $D(T)$ ist ein meßbarer linearer Teilraum von W mit μ -Maß 1.
- (2) T ist linear auf $D(T)$.
- (3) T ist meßbar, d.h. das Urbild jeder Borelmenge in $\mathbb{R}$ (unter T) gehört zur σ -Algebra $\mathcal{A}_W$.

1.4. Bemerkung:

Ist T ein meßbares, im wesentlichen lineares Funktional auf W , so können wir o.B.d.A. annehmen, daß T auf ganz W definiert ist und linear ist auf einem meßbaren linearen Teilraum von W mit Maß 1.

Wir zitieren nun die bereits erwähnten Darstellungssätze von SHILOV/FAN DYK TIN (Satz 1.5.) und J.KUELBS (Satz 1.6.).

1.5. Satz: (SHILOV/FAN DYK TIN (1), p. 96 Theorem 2)

Mit den Bezeichnungen von Beispiel I.23.(3) gelten die folgenden Aussagen:

- a) Ist T ein meßbares, im wesentlichen lineares Funktional auf dem Raum $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, so gilt:
- (1) $1^2 \in D(T)$
 - (2) $\sum_{n \in \mathbb{N}} T(e_n) e_n \in 1^2$
 - (3) Für μ -fast-alles Elemente $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ existiert $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n T(e_n)$ und stimmt mit $T(x)$ überein.
 - (4) Ist $y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ und gilt für μ -fast-alles $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die Gleichheit $T(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n y_n$, so stimmt für jedes $n \in \mathbb{N}$ die n -te Koordinate y_n von y mit $T(e_n)$ überein.
- b) Ist $y \in 1^2$, so existiert für μ -fast-alles $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ die Summe $(x, y)^\sim := \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n y_n$, und die Abbildung $T : x \longmapsto (x, y)^\sim$ ist ein meßbares, im wesentlichen lineares Funktional auf $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Der entsprechende Satz im Fall eines abstrakten Wienertraums im Sinne von L.GROSS lautet:

1.6. Satz: (KUELBS (1), Theorem 3.2.)

Sei (B, H, μ) ein abstrakter Wienertraum im Sinne von L.GROSS. Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ein vollständiges Orthonormalsystem für H , welches in B' liegt. Dann gilt: 1)

1) Es gilt: $B' \subseteq H' \cong H \subseteq B$, wobei B' dicht in H' und H dicht in B enthalten ist.

a) Für jedes $f \in H' \equiv H$ existiert $(x, f)^{\sim} := \sum_{k=1}^{\infty} (f, a_k) a_k(x)$

für μ -fast-alles $x \in B$, und jedes $f \in B'$ stimmt μ -fast-sicher mit der Abbildung $(\cdot, f)^{\sim}$ überein.

b) Eine Abbildung T von B nach $\mathbb{R}$ ist ein meßbares, im wesentlichen lineares Funktional auf B genau dann, wenn ein (eindeutig bestimmtes) Element $f \in H$ existiert, so daß für μ -fast-alles $x \in B$ gilt: $T(x) = (x, f)^{\sim}$.

c) Ist T ein meßbares, im wesentlichen lineares Funktional auf B , so gilt:

i) $H \subseteq D(T)$

ii) $T(x) = \sum_{k=1}^{\infty} T(a_k) a_k(x)$ für μ -fast-alles $x \in B$.

Im folgenden sei (W, H, μ) ein abstrakter Wienertraum (vgl. I.2.4.) und T ein meßbares, im wesentlichen lineares Funktional auf W . Wir zeigen zunächst das folgende Lemma:

1.7. Lemma:

Der definierende Hilbertraum H ist im Definitionsbereich $D(T)$ des Funktionals T enthalten.

Beweis:

Für jedes $x \in W$ bezeichne $\sigma_x : W \longrightarrow W$ die Abbildung $y \longmapsto y + x$ (σ_x ist meßbar bezüglich der σ -Algebra $\mathcal{O}_W$ der W' -Zylindermengen). Sei μ_x das Transportmaß von μ unter σ_x : μ_x ist ein Gaußmaß mit Mittelwert x und dem gleichen Kovarianzkern wie μ . Aus Satz I.2.40. folgt, daß für jedes Element $x \in H$ die Maße μ_x und μ äquivalent sind, d.h. sie haben dieselben Nullmengen. Wir nehmen nun an, daß ein Element $x_0 \in H$ existiert, welches nicht in $D(T)$ liegt. Da H und $D(T)$ lineare Teilräume von W sind, gilt für alle $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$:

$\lambda x_0 \in H$ und $\lambda x_0 \notin D(T)$. Für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ ist die Menge $D_\lambda := D(T) - \lambda x_0$ eine meßbare Menge, und es gilt wegen $\lambda x_0 \in H$ und $\mu(D(T)) > 0$: $\mu(D_\lambda) = \mu(D(T) - \lambda x_0) = \mu_{\lambda x_0}(D(T)) > 0$.

Ist $\lambda_1 \neq \lambda_2$, so sind D_{λ_1} und D_{λ_2} disjunkt. Da $\mathcal{W}$ volles μ -Maß hat, gibt es nur abzählbar viele disjunkte Mengen mit strikt positivem Maß, und wir erhalten einen Widerspruch.

Einen zu Satz 1.6. analogen Satz können wir zunächst nicht formulieren, weil für ein beliebiges vollständiges Orthonormalsystem $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ in $H \cong H'$ der Wert von x_α für Punkte aus $\mathcal{W} \setminus H$ nicht definiert ist. Wir benötigen daher eine μ -fast-sicher eindeutig bestimmte Fortsetzung von Elementen aus H' auf den Gesamt-
raum $\mathcal{W}$.

1.8. Lemma:

Sei $(\mathcal{W}, H, \mu)$ ein abstrakter Wieneraum. Jedes stetige lineare Funktional auf H läßt sich zu einem meßbaren, im wesentlichen linearen Funktional auf $\mathcal{W}$ fortsetzen. Diese Fortsetzung ist μ -fast-sicher eindeutig bestimmt.

Beweis:

Für jedes Element $f \in \mathcal{L}_\mu^2$ sei $[f] := \psi(f)$, wobei ψ die Restklassenabbildung von $\mathcal{L}_\mu^2$ nach L_μ^2 bezeichnet. Sei $h' \in H' \cong H$. Nach der Konstruktion von H existiert eine Folge $([w_n'])_{n \in \mathbb{N}}$ in $\psi(\mathcal{W}')$, welche in der L_μ^2 -Norm gegen h' konvergiert. Sei $\tilde{h} \in \mathcal{L}_\mu^2$ mit $[\tilde{h}] = h'$. Dann existiert eine Folge $(w_n')_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{W}'$, die in $\mathcal{L}_\mu^2$ gegen $\tilde{h}$ konvergiert. Durch Übergang zu einer Teilfolge können wir erreichen, daß die Folge $(w_n')_{n \in \mathbb{N}}$ μ -fast-sicher gegen $\tilde{h}$ konvergiert. Sei $\mathcal{W}(h') := \{x \in \mathcal{W} : \text{es existiert } \lim_{n \rightarrow \infty} w_n'(x)\}$. Dann ist $\mathcal{W}(h')$ ein

meßbarer linearer Teilraum von $\mathcal{W}$ mit Maß 1. Die Abbildung

$\mathcal{F}(h') : \mathcal{W} \longrightarrow \mathbb{R}$, definiert durch

$$\mathcal{F}(h')_{(q)} := \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} w_n'(x) & : x \in \mathcal{W}(h') \\ 0 & : x \notin \mathcal{W}(h') \end{cases},$$

ist ein meßbares Funktional auf $\mathcal{W}$, welches auf $\mathcal{W}(h')$ linear ist, und es gilt: $[\mathcal{F}(h')] = h'$. Faßt man H vermöge $\Theta := \Psi^t$ als linearen Teilraum von $\mathcal{W}$ auf (vgl. I.2.2.(4)), so stimmt die Restriktion von $\mathcal{F}(h')$ auf H mit h' überein. Die Eindeutigkeitsaussage zeigen wir in Lemma 1.10..

1.9. Bemerkung:

Sei für jedes Element $h' \in H'$ der lineare Raum $\mathcal{W}(h')$ wie im Beweis des Lemmas definiert. Dann gilt: Ist $h' \in H'$, so ist der definierende Hilbertraum H in $\mathcal{W}(h')$ enthalten.

1.10. Lemma: (Eindeutigkeitssatz)

Zwei meßbare, im wesentlichen lineare Funktionale T und $\tilde{T}$ auf $\mathcal{W}$, welche auf H übereinstimmen, sind μ -fast-sicher gleich.

Beweis: (vgl. SHILOV/ FAN DYK TIN (1), p.95)

Da die Differenz zweier meßbarer, im wesentlichen linearer Funktionale auf $\mathcal{W}$ wieder ein meßbares, im wesentlichen lineares Funktional auf $\mathcal{W}$ ergibt, ist nur zu zeigen: ist T ein meßbares, im wesentlichen lineares Funktional auf $\mathcal{W}$, welches auf H identisch Null ist, so gilt: $T = 0$ μ -fast-sicher. Jede Menge $E \in \mathcal{O}_{\mathcal{W}}$ mit der Eigenschaft: " $h+E = E$ für jedes $h \in H$ " hat Maß 0 oder 1. Das folgt aus Satz I.2.3. Sei nun $E := [T \geq 0] := \{x \in \mathcal{W} : T(x) \geq 0\}$. Da T auf H verschwindet, gilt für jedes $h \in H$: $h + [T \geq 0] = [T \geq 0]$ und somit: $\mu([T \geq 0]) \in \{0, 1\}$. Aus der Symmetrie des Gaußmaßes μ ergibt sich: $\mu([T \geq 0]) = \mu(\{-x \in \mathcal{W} : x \in [T \geq 0]\}) = \mu([T \leq 0])$, und daher $\mu([T = 0]) = \mu([T \geq 0]) + \mu([T \leq 0]) - \mu([T \geq 0] \cup [T \leq 0]) = 2\mu([T \geq 0]) - 1$. Daher ist $T(x) = 0$ für μ -fast-alles $x \in \mathcal{W}$.

Wir kommen nun zur Formulierung des Darstellungssatzes für meßbare, im wesentlichen lineare Funktionale.

1.11. Satz: (Darstellungssatz)

Sei (W, H, μ) ein abstrakter Wienertraum und $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ ein vollständiges Orthonormalsystem für H . Für jedes $\alpha \in A$ sei $\tilde{f}_\alpha = \tilde{f}(x_\alpha)$ die (nach Lemma 1.8.) μ -fast-sicher eindeutig bestimmte Fortsetzung von x_α zu einem meßbaren, im wesentlichen linearen Funktional auf W . Sei T ein meßbares, im wesentlichen lineares Funktional auf W . Dann gelten die folgenden Aussagen:

$$(1) \sum_{\alpha \in A} \|T(x_\alpha)\|^2 < \infty$$

$$(2) y := \sum_{\alpha \in A} T(x_\alpha) x_\alpha \in H$$

- (3) Es existiert eine Folge $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in A , so daß für μ -fast-alle $x \in W$ die folgende Summe existiert:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{f}_{\alpha_n}(x) T(x_{\alpha_n}) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{f}_{\alpha_n}(x) (y, x_{\alpha_n}) =: (x, y)^{\sim}$$

- (4) Für μ -fast-alle $x \in W$ stimmen $T(x)$ und $(x, y)^{\sim}$ überein. Umgekehrt gilt:

- (5) Für jedes $y \in H$ existieren höchstens abzählbar viele $\alpha \in A$ mit $(y, x_\alpha) \neq 0$. Ist $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Abzählung der Menge $\{\alpha \in A : (y, x_\alpha) \neq 0\}$, so wird durch $T(x) := (x, y)^{\sim} := \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{f}_{\alpha_n}(x) (y, x_{\alpha_n})$ ein meßbares, im wesentlichen lineares Funktional auf W definiert derart, daß für alle $\alpha \in A$ gilt: $T(x_\alpha) = (y, x_\alpha)$.

Beweis:

Wir führen den Beweis in mehreren Schritten:

- I) Behauptung: Die Abbildungen $\tilde{f}_\alpha : W \longrightarrow \mathbb{R} \quad (\alpha \in A)$ sind unter μ unabhängig verteilt mit Mittelwert 0 und Varianz 1. Sei $\mathcal{M}$ die Menge aller $\mathcal{O}_W$ -meßbaren reellen Funktionen auf W (modulo μ -Nullfunktionen). Sei $F : H^1 \longrightarrow \mathcal{M}$ definiert durch $F(h^1) = [\tilde{f}(h^1)]$ (vgl. Beweis von Lemma 1.8.). Die Abbildung F ist linear und eine zur kanonischen Normalverteilung $\mathcal{N}$ auf H gehörige schwache Verteilung. Daher stimmt die gemeinsame Verteilung je endlich vieler $\tilde{f}_\alpha$

unter dem Maß μ überein mit der gemeinsamen Verteilung der zugehörigen Abbildungen x_α unter $\mathcal{W}$, und somit sind die Funktionen ζ_α ($\alpha \in A$) unter μ unabhängig verteilt mit Mittelwert 0 und Varianz 1.

II) Beweis von (1) und (2)

Die Restriktion S von T auf den definierenden Hilbertraum $H \subseteq \mathcal{W}$ ist ein $\mathcal{O}_H$ -meßbares lineares Funktional auf H und daher insbesondere Borel-meßbar. Nach Satz I.2.13. ist S ein stetiges lineares Funktional auf H . Daher gibt es nach dem Satz von RIESZ (Satz 1.1.) genau ein Element $y \in H$, so daß für alle $x \in H$ gilt :

$$T(x) = S(x) = (x, y) = \overline{\sum_{\alpha \in A} (x, x_\alpha) (y, x_\alpha)}.$$

Insbesondere erhalten wir für jedes $\tilde{\alpha} \in A$:

$$T(x_{\tilde{\alpha}}) = \overline{\sum_{\alpha \in A} (x_{\tilde{\alpha}}, x_\alpha) (y, x_\alpha)} = (y, x_{\tilde{\alpha}}), \text{ und somit}$$

$$\overline{\sum_{\alpha \in A} |T(x_\alpha)|^2} = \overline{\sum_{\alpha \in A} (y, x_\alpha) (y, x_\alpha)} = \|y\|^2 < \infty.$$

Daraus folgen (1) und (2).

III) Beweis von (3)

Wegen (1) existiert eine höchstens abzählbare Teilmenge A_0 von A , so daß für alle $\alpha \in A \setminus A_0$ gilt: $T(x_\alpha) = 0$. Wir können o.B.d.A. annehmen, daß A_0 nicht endlich ist. Sei $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine beliebige Abzählung von A_0 . Nach I) sind die Abbildungen $(\zeta_\alpha)_{\alpha \in A}$ unter μ unabhängig verteilt. Jedes ζ_α ist Gaußverteilt mit Mittelwert 0 und Varianz 1. Daher sind die Abbildungen $(T(x_{\alpha_n}) \zeta_{\alpha_n})_{n \in \mathbb{N}}$ unter μ unabhängig verteilt, und zwar ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Abbildung $T(x_{\alpha_n}) \zeta_{\alpha_n}$ Gaußverteilt mit Mittelwert 0 und Varianz $(T(x_{\alpha_n}))^2$. Somit bildet die Folge der Partialsummen $(\sum_{n=1}^k T(x_{\alpha_n}) \zeta_{\alpha_n})_{k \in \mathbb{N}}$ ein Martingal. Hinreichend für die μ -fast-sichere Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} T(x_{\alpha_n}) \zeta_{\alpha_n}$ ist die Bedingung : $\sum_{n=1}^{\infty} (T(x_{\alpha_n}))^2 < \infty$, welche wegen (1) erfüllt ist.

IV) Wir definieren eine Abbildung $\tilde{T}$ von W nach $\mathbb{R}$ durch die folgende Vorschrift :

$$\tilde{T}(x) := \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{T}_{\alpha_n}(x) T(x_{\alpha_n}) & : \text{ falls die Summe existiert} \\ 0 & : \text{ sonst} \end{cases}$$

Als punktweiser Grenzwert einer Folge meßbarer, im wesentlichen linearer Funktionalen auf W ist $\tilde{T}$ ebenfalls meßbar und auf einem Teilraum mit Maß 1 linear.

V) Behauptung: T und $\tilde{T}$ stimmen auf W μ -fast-sicher überein.

Für jedes $\alpha \in A$ gilt: $T(x_\alpha) = \tilde{T}(x_\alpha)$. Da die Restriktionen von T beziehungsweise $\tilde{T}$ auf H stetig sind und die Familie $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ ein vollständiges Orthonormalsystem in H ist, stimmen T und $\tilde{T}$ auf H überein. Nach Lemma 1.10. sind daher T und $\tilde{T}$ μ -fast-sicher gleich.

VI) Die Umkehrung (5) zeigt man analog zu III) und IV) mit (y, x_α) statt $T(x_\alpha)$.

1.12. Bemerkungen:

- Als Spezialfälle erhalten wir aus dem Satz 1.11. die Darstellungssätze von SHILOV/FAN DYK TIN (Satz 1.5.) und KUELBS (Satz 1.6.)
- Ist W nicht endlich-dimensional, so hat H äußeres μ -Maß 0. Dennoch sind die Werte eines meßbaren, im wesentlichen linearen Funktionalen auf W μ -fast-sicher eindeutig festgelegt durch seine Werte auf H .
- Der Beweis eines Darstellungssatzes für meßbare, im wesentlichen lineare Funktionalen auf beliebigen linearen Räumen bei ROZANOV (1) (p.146, Theorem 1) ist nur unter der zusätzlichen Voraussetzung richtig, daß der definierende Hilbertraum separabel ist. Das ist aber im allgemeinen nicht der Fall (vgl. Bemerkung zu Theorem 4 bei DUDLEY/FELDMAN/LE CAM).

Wir werden nun zeigen, daß die in Satz 1.11. auftretende Familie $(\sum_{\alpha} (x) T(x_{\alpha}))_{\alpha \in A}$ summierbar ist für alle x aus einem linearen Teilraum V von W mit äußerem Maß 1.¹⁾ Dazu benötigen wir das folgende Lemma:

1.13. Lemma:

Sei I eine beliebige Indexmenge. Für jedes $i \in I$ sei W_i ein meßbarer linearer Teilraum von W mit $\mu(W_i) = 1$. Dann gilt:

$\bigcap_{i \in I} W_i$ hat äußeres Maß 1.

Beweis:

Wir versehen W mit der schwachen Topologie (bezüglich W'). Das Gaußmaß μ ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf der σ -Algebra $\mathcal{X}_S$ der schwachen Borelmengen in W und hat nach Voraussetzung die Eigenschaft $(*) : \sup\{\mu(K) : K \text{ konvex und schwach kompakt}\} = 1$. Daher gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine schwach kompakte Teilmenge K_{ε} von W mit $\mu(K_{\varepsilon}) \geq 1 - \varepsilon$. Somit ist μ ein straffes, also insbesondere ein τ -stetiges Maß auf $\mathcal{X}_S$. Es kann o.B.d.A. angenommen werden, daß die Familie $(W_i)_{i \in I}$ ein fallendes Netz bildet (sonst gehen wir über zum System aller endlichen Durchschnitte der Räume W_i). Daher konvergiert $(\mu(W_i))_{i \in I}$ gegen $\mu^*(\bigcap_{i \in I} W_i)$ (vgl. etwa VARADARAJAN (1)). Da $\mu(W_i) = 1$ ist für jedes $i \in I$, folgt die Behauptung.

1.14. Satz:

Sei (W, H, μ) ein abstrakter Wienerraum. Dann gilt:

- (1) Zu jedem meßbaren, im wesentlichen linearen Funktional T auf W existiert ein linearer Teilraum V von W mit äußerem Maß 1 und der Eigenschaft: Für alle $x \in V$ ist die Familie $(\sum_{\alpha} (x) T(x_{\alpha}))_{\alpha \in A}$ summierbar und

$$T(x) = \overline{\sum_{\alpha \in A} \sum_{\alpha} (x) T(x_{\alpha})}.$$

¹⁾ Zur Definition der Summierbarkeit vgl. PIETSCH (1), p.17

- (2) Ist $y \in H$, so existiert ein linearer Teilraum V von W mit $\mu^*(V) = 1$, so daß gilt: für alle $x \in V$ ist die Familie $(\tilde{f}_\alpha(x)(y, x_\alpha))_{\alpha \in A}$ summierbar, und $\tilde{T}(x) := \overline{\sum_{\alpha \in A} \tilde{f}_\alpha(x)(y, x_\alpha)}$ läßt sich zu einem meßbaren, im wesentlichen linearen Funktional auf W fortsetzen. Diese Fortsetzung ist μ -fast-sicher eindeutig bestimmt.

Beweis:

- (1) Sei $A_0 = \{\alpha \in A : T(x_\alpha) \neq 0\}$ (o.B.d.A. A_0 nicht endlich). Nach PIETSCH (1), p.17 ist nur zu zeigen: es existiert ein linearer Teilraum V von W mit $\mu^*(V) = 1$, so daß für alle $x \in V$ die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{f}_{\alpha_n}(x) T(x_{\alpha_n})$ unbedingt konvergent ist. Sei Γ die Menge aller Abzählungen von A_0 . Zu $\gamma = (\beta_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \Gamma$ existiert nach Satz 1.11. ein meßbarer linearer Teilraum $V(\gamma)$ mit $\mu(V(\gamma)) = 1$, so daß für alle $x \in V(\gamma)$ die Summe $\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{f}_{\beta_n}(x) T(x_{\beta_n})$ existiert und mit $T(x)$ übereinstimmt. Der lineare Teilraum $V := \bigcap_{\gamma \in \Gamma} V(\gamma)$ von W hat nach Lemma 1.13. äußeres μ -Maß 1 und für jedes $x \in V$ ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{f}_{\alpha_n}(x) T(x_{\alpha_n})$ unbedingt konvergent gegen $T(x)$.
- (2) Sei $y \in H$ beliebig und sei A_0 eine beliebige Teilmenge von A , so daß $(y, x_\alpha) = 0$ ist für jedes $\alpha \in A \setminus A_0$. Sei $\gamma = (\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine beliebige Abzählung von A_0 . Nach Satz 1.11. existiert ein meßbarer linearer Teilraum $V(\gamma)$ von W mit $\mu(V(\gamma)) = 1$, so daß durch
- $$T_\gamma(x) := \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{f}_{\alpha_n}(x)(y, x_{\alpha_n}) & : x \in V(\gamma) \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases}$$

ein meßbares, im wesentlichen lineares Funktional auf $\mathcal{W}$ definiert wird. Sei $\mathcal{G} \in \mathcal{T} \setminus \{\mathcal{T}\}$. Dann existiert nach Satz 1.11.(4) ein meßbarer linearer Teilraum $U(\mathcal{G}) \subseteq V(\mathcal{T}) \cap V(\mathcal{G})$ mit $\mu(U(\mathcal{G})) = 1$, so daß $T_{\mathcal{T}}$ und $T_{\mathcal{G}}$ auf $U(\mathcal{G})$ übereinstimmen. Sei $V := \bigcap_{\mathcal{G} \in \mathcal{T}} U(\mathcal{G})$. Dann folgt aus Lemma 1.13., daß V äußeres μ -Maß 1 hat. Für alle $x \in V$ ist die Familie $(\tilde{f}_{\alpha}(x)(y, x_{\alpha}))_{\alpha \in A_0}$ summierbar; daher ist auch die Fami-

lie $(\tilde{f}_{\alpha}(x)(y, x_{\alpha}))_{\alpha \in A}$ summierbar, und es gilt für jedes $x \in V$:

$T_{\mathcal{T}}(x) = \sum_{\alpha \in A} \tilde{f}_{\alpha}(x)(y, x_{\alpha})$. Die Restriktion $\tilde{T}$ von $T_{\mathcal{T}}$ auf V läßt sich zu einem meßbaren, im wesentlichen linearen Funktional auf $\mathcal{W}$ fortsetzen. Diese Fortsetzung ist nach Lemma 1.10. μ -fast-sicher eindeutig bestimmt.

B : Integraldarstellung meßbarer linearer Funktionale

Als eine Anwendung der im vorhergehenden Abschnitt erhaltenen Ergebnisse zeigen wir nun eine "Integraldarstellung" für meßbare, im wesentlichen lineare Funktionale.

Sei (W, H, μ) ein abstrakter Wieneraum. Das Gaußmaß μ auf der σ -Algebra $\mathcal{O}_W$ der W -Zylindermengen erfüllt die "Varianzbedingung" (VB), wenn gilt:

$$(VB) : w' \in W \setminus \{0\} \implies \sigma^2(w') = \int_W w'^2(x) \mu(dx) > 0.$$

Ist die Varianzbedingung gültig, so können wir jedes Element $w' \in W$ mit seiner Äquivalenzklasse $[w']$ modulo μ identifizieren, und es gilt die Inklusion $W' \subseteq H' \equiv H \subseteq W$.

1.15. Definition:

- Sei (W, H, μ) ein abstrakter Wieneraum derart, daß μ die Varianzbedingung erfüllt. Eine Abbildung $K : \mathbb{R} \times E_K \longrightarrow \mathbb{R}$ heiße Kern von $\mathbb{R} \times W$ nach $\mathbb{R}$, wenn K die folgenden Eigenschaften hat:
- (K1) E_K ist ein meßbarer linearer Teilraum von W mit $\mu(E_K) = 1$.
 - (K2) Für jedes $t \in \mathbb{R}$ ist die Abbildung $x \longmapsto K(t, x)$ ein meßbares, im wesentlichen lineares Funktional auf W .
 - (K3) Für jedes $x \in E_K$ ist die Abbildung $t \longmapsto K(t, x)$ eine stetige lineare Abbildung von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$.
 - (K4) Für jedes $w' \in W'$ ist die Abbildung $x \longmapsto K(w'(x), x)$ meßbar und μ -integrierbar.
 - (K5) Konvergiert eine Folge $(w'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in W' bezüglich der L^2_μ -Topologie gegen 0, so konvergiert die Folge $(K(w'_n(\cdot), \cdot))_{n \in \mathbb{N}}$ bezüglich der L^1_μ -Norm gegen 0.

Wir zeigen, daß eine μ -fast-sicher eindeutig bestimmte Bijektion zwischen der Menge aller meßbaren, im wesentlichen linearen Funktionale auf W und der Menge aller Kerne besteht.

1.16. Satz:

Sei $(\mathcal{W}, \mathcal{H}, \mu)$ ein abstrakter Wieneraum derart, daß μ die Varianzbedingung erfüllt. Dann gilt:

- (1) Zu jedem meßbaren, im wesentlichen linearen Funktional T auf $\mathcal{W}$ gibt es einen Kern K_T von $\mathbb{R} \times \mathcal{W}$ nach $\mathbb{R}$, so daß für alle $w' \in \mathcal{W}'$ gilt:

$$T(w') = \int_{\mathcal{W}} K_T(w'(x), x) \mu(dx) .$$

Für jedes $w' \in \mathcal{W}'$ ist $K_T(w'(\cdot), \cdot)$ μ -fast-sicher eindeutig bestimmt.

- (2) Umgekehrt gibt es zu jedem Kern K von $\mathbb{R} \times \mathcal{W}$ nach $\mathbb{R}$ ein μ -fast-sicher eindeutig bestimmtes, meßbares, im wesentlichen lineares Funktional T_K auf $\mathcal{W}$, so daß für alle $w' \in \mathcal{W}'$ gilt:

$$T_K(w') = \int_{\mathcal{W}} K(w'(x), x) \mu(dx) .$$

Beweis:

- (1) Sei T ein meßbares, im wesentlichen lineares Funktional auf $\mathcal{W}$. Der Definitionsbereich $D(T)$ von T ist ein meßbarer linearer Teilraum von $\mathcal{W}$ mit $\mu(D(T)) = 1$. Wir definieren die Abbildung $K_T : \mathbb{R} \times D(T) \longrightarrow \mathbb{R}$ durch die Vorschrift: $K_T(t, x) := t \cdot T(x)$ ($t \in \mathbb{R}, x \in D(T)$). Die Abbildung K_T ist ein Kern von $\mathbb{R} \times \mathcal{W}$ nach $\mathbb{R}$ mit $E_{K_T} = D(T)$.

Aus dem Darstellungssatz 1.11. erhalten wir die folgende Beziehung: Ist $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ ein vollständiges Orthonormalsystem in $\mathcal{H}$, so gibt es eine Folge $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}}$ des Orthonormalsystems derart, daß für jedes $w' \in \mathcal{W}'$ gilt:¹⁾

$$\begin{aligned} T(w') &= \sum_{n=1}^{\infty} T(x_{\alpha_n})(x_{\alpha_n}, w') = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} T(x_{\alpha_n}) \int_{\mathcal{W}} \int_{\mathcal{W}} x_{\alpha_n}(x) w'(x) \mu(dx) = \end{aligned}$$

¹⁾ Die folgenden Bezeichnungen werden aus Satz 1.11. übernommen.

$$= \int_W \left(\sum_{n=1}^{\infty} T(x_{\alpha_n}) \right) f_{\alpha_n}(x) w'(x) \mu(dx) =$$

$$= \int_W T(x) w'(x) \mu(dx) = \int_W K_T(w'(x), x) \mu(dx).$$

Sei nun K ein weiterer Kern von $\mathbb{R} \times W$ nach $\mathbb{R}$, so daß für jedes $w' \in W'$ gilt:

$$T(w') = \int_W K(w'(x), x) \mu(dx).$$

Wir können o.B.d.A. annehmen, daß $E_K = E_{K_T} = D(T)$ ist.

Für jedes $x \in D(T)$ ist nach (K3) die Abbildung $t \mapsto K(t, x)$ stetig und linear; daher gibt es ein eindeutig bestimmtes $a = a(x) \in \mathbb{R}$, so daß für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt: $K(t, x) = ta(x)$.

Wir zeigen, daß die Abbildung $x \mapsto a(x)$ μ -fast-sicher mit T übereinstimmt.

Aus (K2) folgt, daß die Abbildung $x \mapsto K(1, x) = a(x)$ ein meßbares, im wesentlichen lineares Funktional auf W ist.

Weiter gilt für jedes $w' \in W'$:

$$T(w') = \int_W K(w'(x), x) \mu(dx) = \int_W w'(x) a(x) \mu(dx) =$$

$$= (\text{Restr}_H a)(w') = a(w').$$

Da T und $a(\cdot)$ meßbare, im wesentlichen lineare Funktionale sind, sind ihre Restriktionen auf H stetig. Daher stimmt T mit $a(\cdot)$ nicht nur auf dem dichten Teilraum W' von H , sondern auf ganz H überein. Aus Lemma 1.10. folgt, daß T und $a(\cdot)$ μ -fast-sicher gleich sind.

- (2) Sei K ein Kern von $\mathbb{R} \times W$ nach $\mathbb{R}$. Wegen (K1) und (K4) kann die folgende Abbildung definiert werden:

$$\begin{aligned} T_K : W' &\longrightarrow \mathbb{R} \\ w' &\longmapsto \int_W K(w'(x), x) \mu(dx) \end{aligned}$$

Aus (K3) folgt die Linearität von T_K auf W' , aus (K5) die Stetigkeit: konvergiert eine Folge $(w'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aus W' in der

L^2_μ -Topologie gegen ein Element $w' \in W'$, so konvergiert die Folge $(K(w'_n - w')(\cdot, \cdot))_{n \in \mathbb{N}}$ in der L^1_μ -Topologie gegen 0, und daher gilt wegen (K3) :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} T_K(w'_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_W K(w'_n(x), x) \mu(dx) = \int_W K(w'(x), x) \mu(dx) = \\ &= T_K(w') . \end{aligned}$$

Somit existiert eine eindeutig bestimmte stetige lineare Fortsetzung von T_K auf H , und nach Lemma 1.8. gibt es eine μ -fast-sicher eindeutig bestimmte Fortsetzung auf W , welche ein meßbares, im wesentlichen lineares Funktional auf W darstellt.

Aus dem letzten Abschnitt des Beweises von Satz 1.16. erhalten wir zusammen mit dem Fortsetzungssatz von Hahn-Banach die folgende Aussage:

1.17. Satz:

Sei (W, H, μ) ein abstrakter Wieneraum und sei E ein linearer Teilraum von H . Dann läßt sich jede stetige Linearform auf E fortsetzen zu einem meßbaren, im wesentlichen linearen Funktional auf W .

Die Fortsetzung ist genau dann μ -fast-sicher eindeutig bestimmt, wenn E in H dicht liegt.

C : Das "Wiener-Closure-Theorem"

Als eine Anwendung des Darstellungssatzes 1.11. bringen wir eine Verallgemeinerung des Wiener-Closure-Theorem (WIENER (1)) auf abstrakte Wienerräume. Im Spezialfall eines abstrakten Wienerraums von L.GROSS erhalten wir die Ergebnisse von KUELBS/MANDREKAR (1), deren Beweisideen wir folgen.

Sei (W, H, μ) ein abstrakter Wienerraum, und sei $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ ein vollständiges Orthonormalsystem in H . Das Skalarprodukt auf H bezeichnen wir mit $(\cdot, \cdot)$, die zugehörige Norm mit $\|\cdot\|$. Für jedes $\alpha \in A$ bezeichne $\tilde{f}_\alpha$ die (μ -fast-sicher eindeutig bestimmte) Fortsetzung von x_α zu einem meßbaren, im wesentlichen linearen Funktional auf W (vgl. Lemma 1.8.). Für jedes $y \in H$ ist die Menge $A_y := \{\alpha \in A : (x_\alpha, y) \neq 0\}$ höchstens abzählbar (vgl. Satz 1.11.(5)). Wir betrachten im folgenden ein fest gewähltes Element $y \in H$, für welches die Menge A_y o.B.d.A. nicht endlich ist. Für eine Abzählung $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von A_y sei das meßbare, im wesentlichen lineare Funktional $(\cdot, y)^\sim$ wie in Satz 1.11.(5) definiert:

$$x \longmapsto (x, y)^\sim := \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{f}_{\alpha_n}(x)(y, x_{\alpha_n}) & : \text{ falls die Summe} \\ & \text{ existiert} \\ 0 & : \text{ sonst} \end{cases}$$

$$(x \in W).$$

1.18. Bemerkung:

Das Funktional $(\cdot, y)^\sim$ ist in folgendem Sinne unabhängig von der Wahl des Orthonormalsystems $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ und der Wahl der Abzählung $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ der Menge A_y : wählt man ein anderes vollständiges Orthonormalsystem in H oder eine andere Abzählung der Menge A_y , so stimmen die zu y wie oben definierten meßbaren, im wesentlichen linearen Funktionale μ -fast-sicher überein.

1.19. Lemma: (vgl. KUELBS/MANDREKAR (1))

Sei (W, H, μ) ein abstrakter Wieneraum, und sei $h \in H$. Für jede (bezüglich μ) quadratintegrierbare reelle Funktion f auf W sei

$$U_h(f)(x) := f(x + h) \exp\left\{-\frac{1}{2}(x, h)^{\sim} - \frac{1}{4}\|h\|^2\right\}.$$

Dann definiert U_h einen unitären Operator von $\mathcal{L}_\mu^2$ auf sich.

Zum Beweis dieses Lemmas benötigen wir das folgende Ergebnis von CAMBANIS/RAJPUT:

1.20. Lemma: (CAMBANIS/RAJPUT (1)) (vgl. auch Satz I.2.10.)

Sei (W, H, μ) ein abstrakter Wieneraum, und sei $h \in H$ fest gewählt. Bezeichnet μ_h das Transportmaß von μ unter der (meßbaren) Abbildung $x \longmapsto x + h$, so sind die Maße μ_h und μ äquivalent, und die Dichtefunktion ρ_{-h} von μ_h bezüglich μ ist von der Form:

$$\rho_{-h}(x) = \exp\left\{-\frac{1}{2}(x, h)^{\sim} - \frac{1}{2}\|h\|^2\right\} \quad \text{für } \mu\text{-fast-alles } x \in W.$$

Beweis von Lemma 1.19: (vgl. KUELBS/MANDREKAR (1))

Sei ein Element $h \in H$ gewählt. Wir zeigen, daß für beliebige Elemente $f, g \in \mathcal{L}_\mu^2$ gilt:

$$\int_W f(x)g(x)\mu(dx) = \int_W U_h(f)(x)U_h(g)(x)\mu(dx).$$

Sei $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ ein vollständiges Orthonormalsystem in H , und sei $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Abzählung der Menge $A_h = \{\alpha \in A : (x_\alpha, h) \neq 0\}$.

Wir identifizieren h mit der stetigen Linearform $h' \in H'$:

$$\bigwedge_{x \in H} h'(x) := (x, h). \text{ Bezeichnen wir die Fortsetzung von } h'$$

zu einem meßbaren, im wesentlichen linearen Funktional auf W mit $\int (h')$, so stimmt die Restriktion von $\int (h')$ auf H mit h' überein, und es gilt: $\int (h')(x) = (x, h)^{\sim}$ für μ -fast-alles $x \in W$. Mit h ist auch $-h$ ein Element von H , und aus Lemma 1.20. folgt:

die Maße μ_{-h} und μ sind äquivalent, und die Dichtefunktion ρ_{-h} von μ_{-h} bezüglich μ ist von der Form :

$$\rho_{-h}(x) = \exp \left\{ -(x, h)^{\sim} - \frac{1}{2} \|h\|^2 \right\}.$$

Seien nun $f, g \in \mathcal{L}_{\mu}^2$. Dann ist $m := fg \in \mathcal{L}_{\mu}^1$, und es gilt:

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{W}} f(x)g(x)\mu(dx) &= \int_{\mathcal{W}} m(x)\mu(dx) = \int_{\mathcal{W}} m(x+h)\mu_{-h}(dx) = \\ &= \int_{\mathcal{W}} m(x+h) \exp \left\{ -(x, h)^{\sim} - \frac{1}{2} \|h\|^2 \right\} \mu(dx) = \\ &= \int_{\mathcal{W}} U_h(f)(x)U_h(g)(x)\mu(dx). \end{aligned}$$

Der Rest des Beweises ist klar.

Bemerkung: Für $f \in \mathcal{L}_{\mu}^2$ und $h \in H$ heißt die quadratintegrierbare Abbildung $U_h(f)$ die $\mathcal{L}_{\mu}^2$ -Transformierte von f (bezüglich h).

1.21. Definition:

Eine Abbildung f von $\mathcal{W}$ nach $\mathbb{R}$ heiße ein Polynom über $\mathcal{W}$, wenn gilt : es existieren ein $n \in \mathbb{N}$, $\beta_1, \dots, \beta_n \in A^{(1)}$ und ein Polynom g in n komplexen Variablen, so daß f von der folgenden Form ist: $f(x) = g(\beta_1(x), \dots, \beta_n(x))$ ($x \in \mathcal{W}$).

Für $x, y \in \mathcal{W}$ sei $f(x + iy) := g(\beta_1(x) + i\beta_1(y), \dots, \beta_n(x) + i\beta_n(y))$.

Mit $P(\mathcal{W})$ bezeichnen wir die Menge aller Polynome über $\mathcal{W}$.

1.22. Bemerkung:

$P(\mathcal{W})$ ist eine Algebra, welche in $\mathcal{L}_{\mu}^2$ enthalten ist.

1.23. Definition: (vgl. KUELBS/MANDREKAR (1), SEGAL (1), WIENER (1))

Für jedes Polynom f über $\mathcal{W}$ sei die Fourier-Wiener-Transformierte von f das durch $\mathcal{F}f(y) := \int_{\mathcal{W}} f(\sqrt{2}x + iy)\mu(dx)$ ($y \in \mathcal{W}$) gegebene Polynom über $\mathcal{W}$.

¹⁾ $(x_{\alpha})_{\alpha \in A}$ ist das oben gewählte vollständige Orthonormalsystem in H .

Da für jedes Polynom $f \in P(W)$ gilt:

$$\int_W f(x) \mu(dx) = \int_H \text{Restr}_H f(x) \mathcal{W}(dx), \text{ wobei } \mathcal{W} \text{ die kanonische}$$

Normalverteilung auf H bezeichnet, folgt wie bei SEGAL (1) p.121, daß $\tilde{F}$ ein unitärer Operator von $P(W)$ auf sich ist, welcher zusätzlich die folgende Eigenschaft erfüllt:

$$\tilde{F}^2 f(y) = f(-y) \text{ für alle } f \in P(W) \text{ und für } \mu\text{-fast-alles } y \in W.$$

$\tilde{F}$ läßt sich fortsetzen zu einem unitären Operator von L^2_μ auf sich, für welchen gilt:

$$\tilde{F}^2 f(y) = f(-y) \text{ für alle } f \in L^2_\mu \text{ und für } \mu\text{-fast-alles } y \in W.$$

1.24. Definition:

Ein linearer Teilraum $\mathcal{M}$ von L^2_μ heißt translationsinvariant, wenn für jedes Element h des definierenden Hilbertraums H gilt: $U_h(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{M}$.

Wie bei KUELBS/MANDREKAR (1) zeigt man nun die folgende Version des Wiener-Closure-Theorem (WIENER (1), p.267):

1.25. Satz: (KUELBS/MANDREKAR (1), Theorem 3.2.)

Sei (W, H, μ) ein abstrakter Wienertraum. Ist $\mathcal{M}$ ein translationsinvarianter, abgeschlossener Teilraum von L^2_μ , so gibt es eine Menge $E \in \mathcal{O}_W$ mit der Eigenschaft:

$$\mathcal{M} = \{f \in L^2_\mu : \tilde{F} f(y) = 0 \text{ für } \mu\text{-fast-alles } y \in E\}.$$

Umgekehrt gilt:

$$\text{Ist } E \in \mathcal{O}_W \text{ und } \mathcal{M}_E := \{f \in L^2_\mu : \tilde{F} f(y) = 0 \text{ für } \mu\text{-fast-alles } y \in E\},$$

so ist $\mathcal{M}_E$ translationsinvariant.

$$\text{Sind } A, B \in \mathcal{O}_W, \text{ so gilt: } \mathcal{M}_A = \mathcal{M}_B \iff \mu((A \setminus B) \cup (B \setminus A)) = 0.$$

1.26. Korollar: (WIENER (1), p.267; KUELBS/MANDREKAR (1), Cor. 3.1.)

Sei $0 < p \leq 2$, und sei $f \in L^p_\mu$ gegeben. Es gelte:

$$\mu(\{y : \tilde{F} f(y) = 0\}) = 0. \text{ Dann liegt der von der Menge}$$

$$\{U_h(f) : h \in H\} \text{ erzeugte lineare Teilraum dicht in } L^p_\mu.$$

Bemerkung:

Im Falle eines abstrakten Wienertraums (W, H, μ) im Sinne von L.GROSS stimmt die Darstellung eines im wesentlichen linearen, meßbaren Funtionals T auf dem separablen Banachraum W nach Satz 1.11. überein mit der Fourier-Hermiteischen Entwicklung von T (KUELBS (1)).

Mit Hilfe diese Aussage zeigen KUELBS/MANDREKAR den Wiener-Closure Satz auch für $\mathcal{L}^1_\mu$. Als Anwendung erhalten sie eine Modifikation der WIENER/PITT/TAUBER - Sätze (KUELBS/MANDREKAR(1)). Eine Übertragung dieser Resultate mit den Methoden und Techniken von KUELBS/MANDREKAR erscheint uns als unmöglich, da wesentlich von der Separabilität des definierenden Hilbertraums H Gebrauch gemacht wird.

§ 2 : Meßbare Operatoren

A : Meßbare lineare Operatoren auf lokalkonvexen Räumen

Als eine Anwendung des vorhergehenden Paragraphen zeigen wir einen Darstellungssatz für meßbare lineare Operatoren (vgl. Satz 12). Zunächst wird der Begriff eines meßbaren linearen Operators eingeführt.

Im folgenden seien W und V lokalkonvexe Hausdorff-Räume. Auf W existiere ein Gaußmaß μ , welches die Bedingung $(*)$ erfüllt:

$$(*) \quad \sup \{ \mu(K) : K \subseteq W, K \text{ konvex und schwach kompakt} \} = 1$$

(vgl. p.7). Wie vorher bezeichne $\mathcal{O}_W$ (bzw. $\mathcal{O}_V$) die σ -Algebra der W' (bzw. V') - Zylindermengen in W (bzw. V).

2.1. Definition:

Eine Abbildung $T : D(T) \longrightarrow V$ heißt ein meßbarer linearer Operator von W nach V ¹⁾, wenn gilt:

- (1) Der Definitionsbereich $D(T)$ von T ist ein linearer Teilraum von W mit : $D(T) \in \mathcal{O}_W$ und $\mu(D(T)) = 1$
- (2) T ist linear auf $D(T)$
- (3) Für jede Menge $E \in \mathcal{O}_V$ gilt : $T^{-1}(E) \in \mathcal{O}_W$.

Das folgende Lemma gibt eine Kennzeichnung meßbarer linearer Operatoren.

2.2. Lemma:

Eine Abbildung T von $D(T) \subseteq W$ nach V ist ein meßbarer linearer Operator von W nach V genau dann, wenn gilt:

- (1) $D(T)$ ist ein linearer Teilraum von W mit $D(T) \in \mathcal{O}_W$ und $\mu(D(T)) = 1$, und
- (2) Für jedes stetige lineare Funktional f auf V ist $f \circ T$ ein meßbares, im wesentlichen lineares Funktional auf W .

¹⁾ Bei SHILOV/FAN DYK TIN (1) und ROZANOV (1) heißt ein solcher Operator schwach meßbar

Beweis:

"=>"

Sei $f \in V'$ beliebig. Für den Definitionsbereich $D(f \circ T)$ von $f \circ T$ gilt dann: $D(f \circ T) \supseteq D(T)$, also können wir o.B.d.A. annehmen: $D(f \circ T) = D(T)$. Somit ist $D(f \circ T)$ ein meßbarer linearer Teilraum von W mit $\mu(D(f \circ T)) = \mu(D(T)) = 1$. Seien $x_1, x_2 \in D(T)$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann gilt:

$$\begin{aligned} f \circ T(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) &= f(\lambda_1 T(x_1) + \lambda_2 T(x_2)) = \\ &= \lambda_1 f \circ T(x_1) + \lambda_2 f \circ T(x_2). \end{aligned}$$

Aus 2.1.(3) folgt die Meßbarkeit von $f \circ T$. Somit ist $f \circ T$ ein meßbares, im wesentlichen lineares Funktional auf W .

"=<"

Seien $x_1, x_2 \in D(T)$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ beliebig. Wir nehmen an:

$$T(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \neq \lambda_1 T(x_1) + \lambda_2 T(x_2). \text{ Da } V' \text{ die Punkte von } V \text{ trennt, existiert ein } f \in V' \text{ mit: } f \circ T(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \neq f(\lambda_1 T(x_1) + \lambda_2 T(x_2)) = \lambda_1 f \circ T(x_1) + \lambda_2 f \circ T(x_2).$$

Wegen $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in D(f \circ T)$ gilt aber: $f \circ T(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 f \circ T(x_1) + \lambda_2 f \circ T(x_2)$. Das ist ein Widerspruch, also ist T linear auf $D(T)$.

Sei $E \in \mathcal{O}_W$ von der Form:

$$\begin{aligned} E &= \{v \in V : (f_1(v), \dots, f_n(v)) \in \Gamma_1 x \dots x \Gamma_n\} ; (f_1, \dots, f_n \in V', \\ &\Gamma_1, \dots, \Gamma_n \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}). \text{ Dann gilt: } T^{-1}(E) = \{x \in W : T(x) \in E\} = \\ &= \{x \in W : (f_1 \circ T(x), \dots, f_n \circ T(x)) \in \Gamma_1 x \dots x \Gamma_n\} = \\ &= \bigcap_{i=1}^n \{x \in W : f_i \circ T(x) \in \Gamma_i\} \in \mathcal{O}_W, \text{ da für jedes } i \in \{1, \dots, n\} \end{aligned}$$

gilt: $f_i \circ T$ ist ein meßbares, im wesentlichen lineares Funktional auf W . Da die Zylindermengen der obigen Form einen Erzeuger für die σ -Algebra $\mathcal{O}_W$ bilden, ist auch die Forderung (3) von Definition 2.1. erfüllt.

2.3. Bemerkungen:

Sei T ein meßbarer linearer Operator von W nach V . Für jedes $f \in V'$ sei $D(f \circ T)$ der Definitionsbereich des meßbaren, im wesentlichen linearen Funktional $f \circ T$.

(1) Es kann o.B d.A. angenommen werden: $D(T) = \bigcap_{f \in V'} D(f \circ T)$

(2) Es gilt: $H \subseteq D(T)$ ¹⁾

Beweis:

(1) Für jedes $f \in V'$ betrachten wir statt $f \circ T$ das meßbare, im wesentlichen lineare Funktional $\text{Restr}_{D(T)} f \circ T$.

(2) Für jedes $f \in V'$ ist $f \circ T$ ein meßbares, im wesentlichen lineares Funktional auf W . Somit gilt: $H \subseteq \bigcap_{f \in V'} D(f \circ T) = D(T)$.

Wir betrachten im Rest dieses Abschnitts die folgende Situation:

Sei (B, H, μ) ein abstrakter Wienertraum im Sinne von L. GROSS, und sei B_1 ein separabler Banachraum. Wir bezeichnen mit $\|\cdot\|_1$ die Norm auf B_1 und mit $\|\cdot\|$ die Norm auf B ; $(\cdot, \cdot)$ sei das Skalarprodukt auf H , und $\|\cdot\|$ die zugehörige Hilbertraum-Norm auf H . Es gilt dann das folgende Lemma:

2.4. Lemma:

Sind S und T meßbare lineare Operatoren von B nach B_1 , welche auf H übereinstimmen, so sind S und T μ -fast-sicher gleich.

Beweis:

Es gilt: $\{x : T(x) = S(x)\} = \{x : (T-S)(x) = 0\} = (T-S)^{-1}(\{0\}) \in \mathcal{O}_B$, da $\mathcal{O}_{B_1}$ mit der Borelschen σ -Algebra auf B_1 übereinstimmt und somit $\{0\}$ enthält. Weiter gilt: $\{x : T(x) = S(x)\} = \bigcap_{f \in B_1'} \{x : f \circ T(x) = f \circ S(x)\}$, da B_1' die Punkte von B_1 trennt. Für jedes $f \in B_1'$ ist die Menge $\{x : f \circ T(x) = f \circ S(x)\}$ ein meßbarer linearer Teilraum von

¹⁾ Zur Definition von H vgl. Satz I.1.1.

B mit Maß 1, da $f \circ T$ und $f \circ S$ zwei meßbare, im wesentlichen lineare Funktionale auf B sind, welche auf H übereinstimmen. Somit hat die Menge $\{x : T(x) = S(x)\} = \bigcap_{f \in B_1'} \{x : f \circ T(x) = f \circ S(x)\}$ äußeres Maß 1, und als Element von $\mathcal{O}_B$ sogar Maß 1.

Zur Formulierung und zum Beweis des Darstellungssatzes für meßbare lineare Operatoren benötigen wir noch einige Definitionen:

2.5. Definitionen: (vgl. DAY (1), p.78)

Sei L ein lokalkonvexer Raum, und $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge in L .

a) (A) $\sum_{i \in \mathbb{N}} x_i$ heißt konvergent gegen $x \in L$, wenn gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n x_i = x.$$

(B) $\sum_{i \in \mathbb{N}} x_i$ heißt unbedingt konvergent gegen $x \in L$,

wenn für jede Permutation π der natürlichen Zahlen die Reihe $\sum_{i \in \mathbb{N}} x_{\pi(i)}$ konvergent ist gegen x .

(C) $\sum_{i \in \mathbb{N}} x_i$ heißt "subseries" konvergent, wenn für

jede wachsende Folge $(n_i)_{i \in \mathbb{N}}$ natürlicher Zahlen die Reihe $\sum_{i \in \mathbb{N}} x_{n_i}$ gegen ein Element von L konvergiert.

b) Die Folge $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ genügt der Bedingung

(Ac) genau dann, wenn gilt: $\sum_{i=1}^n x_i$ ist eine Cauchy-Folge in L .

(Bc) genau dann, wenn gilt: $\sum_{i=1}^n$ jede Permutation π der natürlichen Zahlen ist $\sum_{i=1}^n x_{\pi(i)}$ eine Cauchy-Folge in L .

(Cc) genau dann, wenn gilt: für jede wachsende Folge $(n_i)_{i \in \mathbb{N}}$ natürlicher Zahlen ist $\sum_{i=1}^n x_{n_i}$ eine Cauchy-folge in L .

- c) L heißt folgenvollständig, wenn jede Cauchy-Folge in L konvergiert.

2.6. Bemerkungen: (vgl. DAY (1), pp.78,80)

- (1) Ist L ein Banachraum, so ist L folgenvollständig, und es gilt für $X \in \{A, B, C\}$: $(Xc) \iff (X)$, und somit:
 $(C) \iff (B) \implies (A)$.
- (2) Ist L ein Banachraum, und ist die Reihe $\sum_{i \in \mathbb{N}} x_i$ "sub-series" konvergent in der schwachen Topologie, so ist $\sum_{i \in \mathbb{N}} x_i$ "subseries" konvergent in der Norm-Topologie.

Im folgenden setzen wir B_1 als schwach folgenvollständig (d.h. als folgenvollständig in der schwachen Topologie) voraus.
 Beispiele für schwach folgenvollständige Banachräume sind etwa die Räume L^p und l^p für $1 \leq p < \infty$ (vgl. ORLICZ (1)). Weiter ist jeder Hilbertraum schwach folgenvollständig (vgl. HALMOS (2)).

Wir geben uns nun ein vollständiges Orthonormalsystem $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ des (separablen) Hilbertraums H vor, welches in B' liegt. Sei T ein meßbarer linearer Operator von B nach B_1 . Dann ist wegen 2.2. für jedes $f \in B_1'$ die Abbildung $f \circ T$ ein meßbares, im wesentlichen lineares Funktional auf B , und somit erhalten wir aus dem Darstellungssatz für meßbare, im wesentlichen lineare Funktionale (vgl. §1) für jedes $f \in B_1'$ und für μ -fast-alles $x \in \mathcal{W}$ die Gleichheit $f \circ T(x) = \sum_{i=1}^{\infty} f \circ T(x_i) x_i(x)$. Wir wählen nun ein $f \in B_1'$ und eine wachsende Folge $(n_i)_{i \in \mathbb{N}}$ natürlicher Zahlen. Dann gilt:
 $\sum_{i=1}^{\infty} f \circ T(x_{n_i}) x_{n_i}(x)$ ist μ -fast-sicher konvergent. Sei $N(f, (n_i)_{i \in \mathbb{N}})$ die Ausnahmемenge, sei $\mathcal{N} := \bigcup \{N(f, (n_i)_{i \in \mathbb{N}}) : f \in B_1', (n_i)_{i \in \mathbb{N}} \text{ ist eine aufsteigende Folge natürlicher Zahlen}\}$, und sei $\Omega := B \setminus \bigcup_{N \in \mathcal{N}} N$.

2.7. Lemma:

Ω hat äußeres Maß 1 : $\mu^*(\Omega) = 1$.

Beweis:

Sei $\tilde{\mathcal{N}} := \left\{ \bigcup_{i=1}^k N_i : k \in \mathbb{N}, N_1, \dots, N_k \in \mathcal{N} \right\}$. Dann ist $\tilde{\mathcal{N}}$ aufsteigend filtrierend (bzgl. $\subseteq$) und $\Omega = \bigcup_{N \in \tilde{\mathcal{N}}} N = \bigcap_{N \in \tilde{\mathcal{N}}} \left(\bigcup_{N \in \tilde{\mathcal{N}}} N \right) \supseteq \bigcap_{N \in \tilde{\mathcal{N}}} N$. Für jedes $N \in \tilde{\mathcal{N}}$ ist $\mu(N) = 1$, und somit folgt aus der τ -Stetigkeit von $\mu : \mu^*\left(\bigcap_{N \in \tilde{\mathcal{N}}} N\right) = 1$, d.h. $\mu^*(\Omega) = 1$.

2.8. Lemma:

Sei $x \in \Omega$. Für jedes $i \in \mathbb{N}$ sei $\bar{x}_i := T(x_i)x_i(x)$. Dann ist $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} \bar{x}_i$ schwach "subseries" konvergent in B_1 .

Beweis:

Sei $(n_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine wachsende Folge natürlicher Zahlen. Für $k \in \mathbb{N}$ sei $S_k := \bigcup_{i=1}^k \bar{x}_{n_i}$. Da nach Voraussetzung B_1 schwach folgenvollständig ist, ist (nach Bemerkung 2.6.) nur zu zeigen: $(S_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ist bezüglich der schwachen Topologie auf B_1 eine Cauchy-Folge, d.h.

$\bigwedge_{U \in \mathcal{U}(0)} \bigvee_{k_0 \in \mathbb{N}} \bigwedge_{k \geq k_0} \bigwedge_{l \in \mathbb{N}} : S_{k+1} - S_k \in U$, wobei $\mathcal{U}(0)$ das System aller 0-Umgebungen in B_1 bezeichnet. Es genügt, diese Aussage für Null-Umgebungen der folgenden speziellen Gestalt zu zeigen: $U = U_{f_1, \dots, f_n; \varepsilon} :=$

$= \{x \in B_1 : \bigwedge_{j=1, \dots, n} |f_j(x)| < \varepsilon\} ; (n \in \mathbb{N}, f_j \in B_1', \varepsilon > 0)$.

Seien also $f_1, \dots, f_n \in B_1'$ und $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Für $j \in \{1, \dots, n\}$ und für $x \in \Omega$ gilt dann : $x \notin \bigcup_{N \in \tilde{\mathcal{N}}} N$, und somit :

$x \notin N(f_j, (n_i)_{i \in \mathbb{N}})$. Daher ist die Summe $\sum_{i=1}^{\infty} f_j \circ T(x_{n_i})x_{n_i}(x)$

konvergent, d.h. $\bigvee_{k_j \in \mathbb{N}} \bigwedge_{k \geq k_j} \bigwedge_{l \in \mathbb{N}} \left| \sum_{i=k+1}^{k+l} f_j \circ T(x_{n_i})x_{n_i}(x) \right| < \varepsilon$.

Für $k_0 := \max(k_1, \dots, k_n)$ gilt:

$$\bigwedge_{k \geq k_0} \bigwedge_{1 \in \mathbb{N}} \bigwedge_{j=1, \dots, n} (|f_j(s_{k+1} - s_k)| = |f_j(\sum_{i=k+1}^{k+1} \bar{x}_{n_i})| =$$

$$= |\sum_{i=k+1}^{k+1} f_j(\bar{x}_{n_i})| = |\sum_{i=k+1}^{k+1} f_j \circ T(x_{n_i}) x_{n_i}(x)| < \varepsilon). \text{ Da-}$$

raus ergibt sich die Behauptung.

2.9. Korollar:

Für jedes $x \in \Omega$ ist $\sum_{i \in \mathbb{N}} T(x_i) x_i(x)$ konvergent.

Beweis:

Sei $x \in \Omega$. Nach 2.8. ist $\sum_{i \in \mathbb{N}} T(x_i) x_i(x)$ schwach "subseries"

konvergent, und daher nach Bemerkung 2.6. "subseries" konvergent (in der Normtopologie) auf B_1 . Aus Bemerkung 2.6.(1) folgt dann die Behauptung.

2.10. Lemma:

Die Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} T(x_i) x_i(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n T(x_i) x_i(x)$ ist konvergent für alle x aus einem meßbaren linearen Teilraum E von B mit $\mu(E) = 1$.

Beweis:

Sei $E := \{x \in B : \sum_{i=1}^{\infty} T(x_i) x_i(x) \text{ ist konvergent}\}$. E ist

meßbar, denn $E = \{x \in B : \text{es existiert } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n T(x_i) x_i(x) \in B\} =$

$$= \{x \in B : \bigwedge_{\varepsilon > 0} \bigvee_{n_0 \in \mathbb{N}} \bigwedge_{m \in \mathbb{N}} \bigwedge_{n \geq n_0} \|\sum_{i=n}^m T(x_i) x_i(x)\| < \varepsilon\} =$$

$$= \bigcap_{\varepsilon > 0} \bigcup_{n_0 \in \mathbb{N}} \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \geq n_0} \left\{ \sum_{i=n}^m T(x_i) x_i(x) \in K_{\varepsilon}(0) \right\}, \text{ wobei}$$

$K_{\varepsilon}(0)$ die ε -Kugel um 0 in B_1 bezeichnet. Da B_1 ein separabler Banachraum ist, folgt $K_{\varepsilon}(0) \in \mathcal{Q}_{B_1}$. Es genügt also zu

zeigen, daß für jedes Paar $(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ die Abbildung

$$S_{m,n} : B \rightarrow B_1, \text{ definiert durch } x \mapsto \sum_{i=n}^m T(x_i) x_i(x) \text{ eine}$$

meßbare Abbildung von B nach B_1 ist. Da $\mathcal{A}_{B_1}$ mit der von den Elementen $f \in B'_1$ in B_1 erzeugten σ -Algebra übereinstimmt, ist die Abbildung $S_{m,n}$ genau dann meßbar bezüglich $\mathcal{A}_B$ und $\mathcal{A}_{B_1}$, wenn für jedes $f \in B'_1$ die reelle Funktion $f \circ S_{m,n}$ ($\mathcal{A}_B - \mathcal{X}_{\mathbb{R}} -$) meßbar ist. Sei also $f \in B'_1$. Dann gilt:

$$f \circ S_{m,n} = \sum_{i=1}^m f \circ T(x_i) x_i. \text{ Daher ist } f \circ S_{m,n} \text{ als Linearkombi-}$$

nation der Abbildungen $x_i \in B' \quad (i \in \{1, \dots, m\})$ meßbar. Die Menge E ist ein linearer Teilraum von B mit $\mu(E) = 1$, denn E enthält die Menge Ω , welche äußeres Maß 1 hat. Daher ist $1 = \mu^*(E) = \mu(E)$. Das Lemma ist damit bewiesen.

2.11. Satz:

Durch $\tilde{T} : x \mapsto \sum_{i=1}^{\infty} T(x_i) x_i(x)$ ist ein meßbarer linearer

Operator von B nach B_1 definiert.

(Der Definitionsbereich $D(\tilde{T})$ von $\tilde{T}$ stimmt mit dem Konvergenzbereich der Reihe überein).

Beweis:

$\tilde{T}$ ist definiert auf einem meßbaren linearen Teilraum E von B mit $\mu(E) = 1$. Weiter ist für jedes $f \in B'_1$ die Abbildung $f \circ \tilde{T}$ ein meßbares, im wesentlichen lineares Funktional auf B . Somit ist nach Lemma 2.2. die Abbildung $\tilde{T}$ ein meßbarer linearer Operator von B nach B_1 .

Als Zusammenfassung der obigen Resultate erhalten wir den folgenden Satz:

2.12. Satz: (Darstellungssatz für meßbare lineare Operatoren)

Sei (B, H, μ) ein abstrakter Wieneraum im Sinne von L. GROSS, B_1 ein schwach folgenvollständiger separabler Banachraum.

Sei T ein meßbarer linearer Operator von B nach B_1 , und sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ein vollständiges Orthonormalsystem für H , welches in B' liegt.

Dann gilt für μ -fast-alles $x \in B$:

$T(x) = \sum_{i=1}^{\infty} T(x_i)x_i(x)$, und für jedes $f \in B'_1$ gilt:

$$\sum_{i=1}^{\infty} (f \circ T(x_i))^2 < \infty.$$

Umgekehrt gilt:

Ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in B_1 , so daß für alle $f \in B'_1$ gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (f(a_n))^2 < \infty, \text{ so ist die Reihe } \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n(x) \text{ unbedingt}$$

konvergent auf einem linearen Teilraum Ω von B mit $\mu^*(\Omega) = 1$.

Durch $x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n(x)$ wird ein meßbarer linearer Operator T

von B nach B_1 definiert derart, daß für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$a_n = T(x_n).$$

In einem Spezialfall erhalten wir das folgende Korollar:

2.13. Korollar:

Sei B schwach folgenvollständig, und sei $I : B \rightarrow B$ der identische Operator. Das Orthonormalsystem $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sei wie oben gewählt. Dann gilt für μ -fast-alles $x \in B$:

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i(x)x_i. \text{ Die Reihe ist unbedingt konvergent für}$$

alle Elemente x eines linearen Teilraums Ω von B mit äußerem Maß 1.

Beweis:

I ist ein schwach meßbarer linearer Operator von B nach B .

2.14. Bemerkung:

Unter den Voraussetzungen von Korollar 2.13. gilt: $x_i(x_j) = \delta_{ij}$. Also existiert eine Folge $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ in B , und es

existiert eine Folge $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$ in B' mit: $f_i(x_j) = \delta_{ij}$ so,

daß für alle Elemente x aus einem linearen Teilraum Ω von B

mit $\mu^*(\Omega) = 1$ gilt: $\sum_{i \in \mathbb{N}} f_i(x)x_i$ ist unbedingt konvergent gegen x .

B : Stark meßbare lineare Operatoren auf lokalkonvexen Räumen

Im ersten Abschnitt dieses Paragraphen haben wir meßbare lineare Operatoren betrachtet. Der Definitionsbereich $D(T)$ eines solchen Operators T war dabei als meßbarer linearer Teilraum eines lokalkonvexen Raumes W vorausgesetzt, auf welchem ein Gaußmaß μ existiert, welches die "Ausschöpfungseigenschaft" $(*)$ erfüllt (vgl. Definition 2.1.). Wir haben gesehen, daß der zu W und μ gehörige definierende Hilbertraum H in $D(T)$ enthalten ist (vgl. Bemerkung 2.3.(2)). Erfüllt auch das Bildmaß μ_T von μ unter T die Bedingung $(*)$, und ist H_T der zu μ_T und zum Bildraum V des Operators T gehörige (von T abhängige) definierende Hilbertraum, so werden wir sehen, daß $T(H)$ in H_T enthalten ist. Da T durch seine Werte auf H fast-sicher eindeutig bestimmt ist, kann T dann als linearer Operator von H nach H_T aufgefaßt werden.

Stimmen die Räume W und V überein, so sind H und H_T im allgemeinen verschieden, und $T(H)$ ist nicht notwendigerweise in H enthalten. Im Fall eines stark meßbaren linearen Operators auf einem separablen Banachraum ist das jedoch der Fall (vgl. Satz 2.21.). In Satz 2.26. erhalten wir aus dem Darstellungssatz für meßbare lineare Operatoren (Satz 2.12.) zusammen mit Ergebnissen von ROZANOV (1) einen Charakterisierungssatz für stark meßbare lineare Operatoren auf schwach folgenvollständigen Banachräumen. Zunächst benötigen wir das folgende Lemma:

2.15. Lemma:

Seien W und V lokalkonvexe Hausdorff-Räume. Sei μ ein Gaußmaß auf W (mit Mittelwert 0), welches die Bedingung $(*)$ erfüllt, und sei T ein meßbarer linearer Operator von W nach V . Dann ist das Transportmaß μ_T von μ unter T ein Gaußmaß (mit Mittelwert 0) auf V .

Beweis:

Nach Lemma 2.2. ist für jedes Element $v' \in V'$ die Abbildung $v' \circ T$ ein meßbares, im wesentlichen lineares Funktional auf $\mathbb{W}$. Daher existiert nach Satz 1.11. eine Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Gaußverteilten Zufallsvariablen auf $\mathbb{W}$, welche μ -fast-sicher punktweise gegen $v' \circ T$ konvergiert. Für das charakteristische Funktional χ_{μ_T} von μ_T gilt dann:

$$\begin{aligned}\chi_{\mu_T}(v') &= \int_V \exp(iv'(x)) \mu_T(dx) = \int_{\mathbb{W}} \exp(iv' \circ T(x)) \mu(dx) \\ &= \int_{\mathbb{W}} \exp(i \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)) \mu(dx) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{W}} \exp(if_n(x)) \mu(dx) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \exp(-\frac{1}{2} \sigma^2(f_n)) . \text{ Da } \mu \text{ ein Gaußmaß ist, folgt (Satz}\end{aligned}$$

I. 1.7.):

$\chi_{\mu_T}(v') = \exp(-\frac{1}{2} \sigma^2(v' \circ T))$. Daraus erhält man sofort die Behauptung.

Sei nun T ein meßbarer linearer Operator von $\mathbb{W}$ nach V .

2.16. Wir werden im folgenden annehmen, daß auch μ_T der Eigenschaft $(*)$ genügt, d.h. $\sup\{\mu_T(K) : K \subseteq V, K \text{ konvex und schwach kompakt}\} = 1$.

2.17.

Bemerkung:

Die Annahme 2.16. ist zum Beispiel dann erfüllt, wenn V ein polnischer Raum ist, oder wenn T stetig ist bezüglich der schwachen Topologien auf $\mathbb{W}$ und V .

Ist $\gamma_T : V' \rightarrow L^2_{\mu_T}$ die Restklassen-Abbildung modulo μ_T ,

so kann wegen der Annahme 2.16. der Hilbertraum $H_T = \overline{\gamma_T(V')}$ (der Abschluß wird in $L^2_{\mu_T}$ gebildet) als ein linearer Teilraum von V aufgefaßt werden (vgl. Satz I.2.4.).

2.18. Wir werden nun zeigen, daß der Operator T den Hilbertraum

H in den Hilbertraum H_T überführt :

Sei $D(T)$ der Definitionsbereich von T und sei die Abbildung

$$T_H : \Psi_T(V') \longrightarrow H' \text{ definiert durch die Vorschrift}$$

$$[v']_{\mu_T} \longmapsto \text{Restr}_H v' \circ T.$$

(Für $v' \in V'$ bezeichne $[v']_{\mu_T}$ die Restklasse von v' modulo μ_T).

a) T_H ist wohldefiniert, denn: es gilt $v'_1, v'_2 \in [v']_{\mu_T}$

$$\iff v'_1(x) = v'_2(x) \text{ für } \mu_T\text{-fast-alles } x \in V \iff$$

$$\mu_T(\{x \in V : v'_1(x) \neq v'_2(x)\}) = 0 \iff$$

$$\mu(\{x \in D(T) : v'_1(T(x)) \neq v'_2(T(x))\}) = 0 \iff$$

$v'_1 \circ T(x) = v'_2 \circ T(x)$ für μ -fast-alles $x \in W$. Das gilt nach

dem Darstellungssatz für meßbare, im wesentlichen lineare Funktionale aber genau dann, wenn $v'_1 \circ T$ und $v'_2 \circ T$ auf H übereinstimmen.

b) Die Abbildung T_H ist stetig, falls der lineare Raum $\Psi_T(V')$

mit der $L^2_{\mu_T}$ -Topologie versehen wird:

Sei $[v']_{\mu_T} \in \Psi_T(V')$, und $v' \in [v']_{\mu_T}$. Dann gilt:

$$\int_V v'^2(x) \mu_T(dx) = \int_W (v' \circ T)^2(x) \mu(dx), \text{ d.h.}$$

$$([v']_{\mu_T}, [v']_{\mu_T})_{L^2_{\mu_T}} = ([v' \circ T]_{\mu}, [v' \circ T]_{\mu})_{L^2_{\mu}}.$$

c) Da H_T gleich dem Abschluß von $\Psi_T(V')$ ist, kann T_H als stetige Abbildung von $H_T \cong H'_T$ nach H' aufgefaßt werden, und somit ist die zu T_H adjungierte Abbildung T_H^* von H nach H_T stetig. Für jedes $v' \in V'$ und für jedes $x \in H$ gilt:

$$v' \circ T(x) = \text{Restr}_H v' \circ T(x) = (T_H([v']_{\mu_T}), x)_{L^2_{\mu}} =$$

$$= ([v']_{\mu_T}, T_H^*(x))_{L^2_{\mu_T}} = \int_V v'(y) T_H^*(x)(y) \mu_T(dy) =$$

$$= v'(T_H^*(x)).$$

Da V' die Punkte von V trennt, erhalten wir für jedes

Element $x \in H : T(x) = T_H(x) \in H_T$.

Stimmen $\mathcal{W}$ und V überein, d.h. ist T ein meßbarer linearer Operator auf $\mathcal{W}$, so bildet T den definierenden Hilbertraum im allgemeinen nicht in sich ab. Das zeigt etwa das folgende Beispiel:

2.19. Beispiel:

Sei $\mathcal{W} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ der Raum aller reellen Zahlenfolgen, und sei $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die "kanonische Basis". Mit μ_0 bezeichnen wir die kanonische Normalverteilung auf $\mathcal{W}$, und für jede natürliche Zahl n sei σ_n die "n-te Koordinatenabbildung". Der definierende Hilbertraum zu $\mathcal{W}$ und μ_0 ist der Raum l^2 aller quadratkonvergenten Zahlenfolgen (vgl. Beispiel I.2.3 (3)). Durch die Vorschrift

$x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} n \sigma_n(x) e_n$ wird ein meßbarer linearer Operator T von $\mathcal{W}$ nach $\mathcal{W}$ definiert. Sei $x_0 := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e_n$.

Da die Folge $(\frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}}$ quadratkonvergent ist, ist x_0 ein Element von l^2 . Es gilt aber:

$$T(x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} n \sigma_n \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} e_k \right) e_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(n \frac{1}{n} \right) e_n \notin l^2.$$

Wir werden nun hinreichende Bedingungen angeben, unter welchen ein meßbarer linearer Operator T den definierenden Hilbertraum auf sich abbildet. Sei im folgenden $(\mathcal{W}, H, \mu)$ ein abstrakter Wienertraum.

2.20. Definition:

Ein meßbarer linearer Operator T von $\mathcal{W}$ nach $\mathcal{W}$ heißt stark meßbar¹⁾, wenn das Maß μ und das Transportmaß μ_T von μ unter T äquivalente Maße sind.

¹⁾ Bei SHILOV/FAN DYK TIN (1) und ROZANOV (1) heißt ein solcher Operator meßbar.

Es gilt nun der folgende Satz:

2.21. Satz: (vgl. FAN DYK TIN (1), p.116; ROZANOV (1), p.153)

Ist T ein stark meßbarer linearer Operator von $\mathcal{W}$ nach $\mathcal{W}$,
so bildet T den Hilbertraum H in sich ab.

Beweis:

Der Beweis des Satzes verläuft analog zum Beweis der Aussage 2.18. (um die Stetigkeit der Abbildung T_H zu zeigen, verwendet man hier die starke Meßbarkeit des Operators T (vgl. ROZANOV (1), p.35, Theorem 1 und pp.32, 33, Bedingung (6) und (7)).

Um eine hinreichende Bedingung dafür angeben zu können, daß ein stark meßbarer linearer Operator auf $\mathcal{W}$ den Hilbertraum H auf sich abbildet, benötigen wir noch die folgende Definition:

2.22. Definition:

Ein meßbarer linearer Operator T von $\mathcal{W}$ nach $\mathcal{W}$ heißt fast sicher bijektiv, wenn gilt:

- (i) Für jede meßbare Teilmenge A von $\mathcal{W}$ mit $\mu(A) = 0$ gilt: die Menge $T(A \cap D(T))$ ist meßbar und $\mu(T(A \cap D(T))) = 0$, und
- (ii) Für jede meßbare Teilmenge A von $\mathcal{W}$ mit $\mu(A) = 1$ gilt: die Menge $T(A \cap D(T))$ ist meßbar und $\mu(T(A \cap D(T))) = 1$.

Nun gilt der folgende Satz:

2.23. Satz: (vgl. FAN DYK TIN (1), p.116)

Ist T ein fast sicher bijektiver, stark meßbarer linearer Operator von $\mathcal{W}$ nach $\mathcal{W}$, so gilt: $T(H) = H$.

Beweis:

Nach Satz 2.21. ist nur zu zeigen: $H \subseteq T(H)$. Wir nehmen an, es gibt ein Element $x \in D(T) \setminus H$ derart, daß $T(x)$ in H liegt. Nach Satz 1.4.9. gibt es dann eine meßbare Teilmenge A

von $\mathcal{W}$ mit $\mu(A) = 1$ und $\mu(A + x) = 0$. Da der Operator T nach Voraussetzung fast sicher bijektiv ist, gilt: $0 = \mu(T((A + x) \cap D(T))) = \mu(T(A \cap D(T)) + T(x))$. Es gilt aber auch: $1 = \mu(A) = \mu(T(A \cap D(T))) = \mu(T(A \cap D(T)) + T(x))$. Das ist ein Widerspruch, also liegt für jedes $x \in D(T) \setminus H$ der Punkt $T(x)$ nicht in H . Da T fast sicher bijektiv ist, folgt $\mu(T(D(T))) = \mu(\mathcal{W}) = 1$. Weil der Hilbertraum H in $T(D(T))$ enthalten ist, gilt: $\bigwedge_{h \in H} \bigvee_{\tilde{x} \in D(T)} h = T(\tilde{x})$. Wäre x kein Punkt von H , so würde folgen, daß $h = T(x)$ nicht zu H gehört. Das ist ein Widerspruch, und der Satz ist bewiesen.

2.24. Bemerkung:

Ist (B, H, μ) ein abstrakter Wienertraum im Sinne von L. GROSS, so gilt: ist T ein meßbarer linearer Operator von B nach B , der fast sicher bijektiv ist, und ist $y \in D(T) \setminus \{0\}$, so folgt: $T(y) \neq 0$, d.h. die Abbildung $\text{Restr}_H T$ ist eine Bijektion von H auf sich.

(Der Beweis dieser Bemerkung verläuft analog zum Beweis der entsprechenden Aussage für den Folgenraum $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (FAN DYK TIN (1), §8.2. Lemma 2)).

Wir bringen nun noch einen Charakterisierungssatz für stark meßbare lineare Operatoren auf schwach folgenvollständigen Banachräumen. Dabei verwenden wir den Darstellungssatz für meßbare lineare Operatoren (Satz 2.12.) und das folgende Ergebnis von ROZANOV:

Sei $(\mathcal{W}, H, \mu)$ ein abstrakter Wienertraum, für den der definierende Hilbertraum H separabel ist. Mit I_H bezeichnen wir den Einheitsoperator von H auf sich. Für einen linearen Operator A auf H sei A^* der adjungierte Operator. Dann gilt der folgende Satz:

2.25. Satz: (ROZANOV (1), Lemma 5; Bemerkung 1.12.c))

Ein meßbarer linearer Operator T von $\mathcal{W}$ nach $\mathcal{W}$ ist genau dann stark meßbar, wenn gilt: $I_H - \text{Restr}_H T (\text{Restr}_H T)^*$ ist ein Hilbert-Schmidt-Operator auf H , für welchen 1 kein Eigenwert ist.

Als Folgerung erhalten wir den Satz:

2.26. Satz:

Sei (B, H, μ) ein abstrakter Wieneraum im Sinne von L. GROSS und sei B schwach folgenvollständig. Sei weiter $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ein vollständiges Orthonormalsystem für H , welches in B^1 liegt. Dann wird durch $T \mapsto (x_i, T(x_n))_{i, n \in \mathbb{N}}$ eine Bijektion definiert von der Menge aller stark meßbaren linearen Operatoren von B nach B (modulo μ) in die Menge aller unendlichen reellen Matrizen $A = (a_{mn})_{m, n \in \mathbb{N}}$ mit den folgenden Eigenschaften:

a) $I - AA^*$ ist eine Hilbert-Schmidt Matrix, welche 1 nicht als Eigenwert hat. (A^* bezeichnet die zu A adjungierte Matrix und I die Einheitsmatrix)

$$\text{b) } \bigwedge_{m \in \mathbb{N}} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}^2 < \infty \quad \text{und} \\ \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} \sum_{m=1}^{\infty} a_{mn}^2 < \infty .$$

Beweis:

Seien (B, H, μ) und $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ wie in der Voraussetzung gegeben, und sei T ein stark meßbarer linearer Operator von B nach B . Nach Satz 2.12. gilt dann:

$$T(x) = \sum_{i=1}^{\infty} T(x_i) x_i(x) \quad \text{für } \mu\text{-fast-alles } x \in B. {}^1)$$

Für μ -fast-alles $x \in B$ gilt somit:

$$T(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} (x_n, T(x_i)) x_n \right) x_i(x) .$$

Sei $A_T := ((x_i, T(x_n)))_{i, n \in \mathbb{N}}$ und sei S ein meßbarer linearer Operator von B nach B , der mit T μ -fast-sicher übereinstimmt. Dann existiert ein meßbarer linearer Teilraum E von B mit $\mu(E) = 1$, auf welchem S und T übereinstimmen. Da H in E enthalten ist, stimmen die Matrizen A_S und A_T überein.

Für jede natürliche Zahl i liegt x_i in B^1 , und daher ist die

¹⁾ Die Indizierung der Summe soll verdeutlichen, in welchem Raum die Konvergenz betrachtet wird.

Abbildung $x_i \circ T$ für jedes $i \in \mathbb{N}$ ein meßbares, im wesentlichen lineares Funktional auf B . Wir erhalten somit für jedes $i \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (x_i \circ T(x_n))^2 = \sum_{n=1}^{\infty} (x_i, T(x_n))^2 < \infty. \text{ Andererseits}$$

gilt: für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $T(x_n)$ ein Punkt in H , und daher

$$\sum_{n=1}^{\infty} (x_i, T(x_n))^2 < \infty. \text{ Nach Satz 2.25. ist } I - A_T A_T^* \text{ eine}$$

Hilbert-Schmidt-Matrix, welche 1 nicht als Eigenwert hat.

Die Matrix A_T erfüllt somit die Eigenschaften a) und b) des Satzes.

Sei umgekehrt $A = (a_{mn})_{m,n \in \mathbb{N}}$ eine unendliche reelle Matrix

mit den Eigenschaften a) und b). Durch die Vorschrift

$$x \longmapsto \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{\infty} a_{mn} x_m \right) x_n(x) \text{ wird ein meßbarer line-}$$

arer Operator T_A von B nach B definiert: für jedes $n \in \mathbb{N}$

gilt: $\sum_{m=1}^{\infty} a_{mn} x_m \in H$, da $\sum_{m=1}^{\infty} a_{mn}^2 < \infty$ ist. Weiter gilt

$$\text{für alle } k \in \mathbb{N}: \sum_{n=1}^{\infty} \left(x_k \left(\sum_{m=1}^{\infty} a_{mn} x_m \right) \right)^2 =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{\infty} x_k(a_{mn} x_m) \right)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{\infty} a_{mn} x_k(x_m) \right)^2 =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} a_{kn}^2 < \infty. \text{ Nach Satz 2.12. ist } T_A \text{ somit ein meß-}$$

barer linearer Operator von B nach B . Aus der Bedingung

a) folgt mit Satz 2.25. die starke Meßbarkeit von T_A .

Seien nun $i, k \in \mathbb{N}$ beliebig. Dann gilt:

$$(x_i, T_A(x_k)) = (x_i, \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{\infty} a_{mn} x_m \right) x_n(x_k)) =$$

$$= (x_i, \sum_{m=1}^{\infty} a_{mk} x_m) = \sum_{m=1}^{\infty} a_{mk} (x_i, x_m) = a_{ik}. \text{ Damit ist der}$$

Satz bewiesen.

Beispiele:

In diesen Beispielen betrachten wir stets den abstrakten Wiener Raum $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, l^2, \mu)$ und verwenden die Bezeichnungen von Beispiel 1.2.3.(3).

- (1) Beispiel für einen meßbaren linearen Operator, welcher nicht stark meßbar ist:

Der in Beispiel 2.19. definierte meßbare lineare Operator T auf $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ bildet l^2 nicht in sich ab und ist daher nach Satz 2.21. nicht stark meßbar.

- (2) Beispiel für einen meßbaren linearen Operator, welcher den definierenden Hilbertraum in sich überführt, aber nicht stark meßbar ist:

Sei $T : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ definiert durch

$$x = (x_k)_{k \in \mathbb{N}} \longmapsto \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \hat{\sigma}_k(x) e_k.$$

Nach Lemma 2.2. ist T ein meßbarer linearer Operator auf $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$; man sieht leicht, daß T den definierenden Hilbertraum l^2 in sich überführt und daß $T_0 := \text{Restr}_{l^2} T$ ein selbstadjungierter Operator auf l^2 ist.

Sei I_0 die Identität auf l^2 und sei $S := I_0 - T_0 T_0^*$.

Der Operator S von l^2 in sich läßt sich schreiben in der Form

$$\begin{aligned} l^2 \ni x &\longmapsto \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) \hat{\sigma}_k(x) e_k = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) (x, e_k) e_k. \end{aligned}$$

Die Summe $\sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)^2$ ist divergent, und daher

ist S kein Hilbert-Schmidt-Operator. Aus Satz 2.25. folgt nun, daß T nicht stark meßbar ist.

- (3) Der identische Operator von $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ auf sich ist ein stark meßbarer linearer Operator.

C : Rotationsinvariante Maße auf abstrakten Wienerräumen

Ein Satz von Y. UMEMURA besagt, daß ein endliches Borel-Maß, welches auf dem Dualraum eines nuklearen Raumes gegeben ist, genau dann rotationsinvariant ist, wenn es sich schreiben läßt als Überlagerung von Gaußmaßen (UMEMURA (1), Theorem 21.1.). Eine Modifikation der Definition der Rotationsinvarianz gestattet es, einen analogen Satz im Falle eines Zylindermaßes auf einem abstrakten Wienerraum zu formulieren.

Sei (W, H, μ) ein (fest gewählter) abstrakter Wienerraum. Mit $(\cdot, \cdot)$ bezeichnen wir das Skalarprodukt auf H , und mit $\|\cdot\|$ die zugehörige Hilbertraum-Norm. Wir setzen voraus, daß μ die Varianzbedingung (VB) erfüllt (vgl. §1, B) :

$$w' \in W' \setminus \{0\} \implies \sigma^2(w') = \int_W w'^2(x) \mu(dx) > 0.$$

Dann kann W' als ein linearer Teilraum von W aufgefaßt werden, und nach Satz I.2.2.(6) ist der definierende Hilbertraum H (und somit auch W') dicht in W enthalten.

2.27. Definition:

(I) Ein stetiger (linearer) Operator T von W auf sich heiße eine Rotation auf (W, H, μ) , wenn gilt:

- (1) T ist auf ganz W definiert
- (2) $T(x) \in H \iff x \in H$
- (3) $\bigwedge_{x \in H} \|T(x)\| = \|x\| \quad 1)$

(II) Ein Zylindermaß P auf W heiße rotationsinvariant (bzgl. μ), wenn P invariant ist unter allen Rotationen auf (W, H, μ) , d.h. wenn für jede Rotation T auf (W, H, μ) das Transportmaß P_T von P unter T mit dem Maß P übereinstimmt.

In Satz 2.30. werden wir eine Charakterisierung der (bzgl. μ) rotationsinvarianten Zylindermaße auf W bringen. Dazu benötigen

1)

Nach Lemma 2.2. ist jede Rotation eine meßbare Abbildung.

wir die folgenden beiden Hilfssätze. Das Lemma 2.29. sichert darüberhinaus die Existenz hinreichend vieler Rotationen auf (W, H, μ) .

2.28. Lemma:

Sei T eine Rotation auf (W, H, μ) . Mit T^* bezeichnen wir den zu T adjungierten Operator auf W' . Dann gilt für jedes $w' \in W'$ ($\subseteq H$) : $\|T^*(w')\| = \|w'\|$.

Beweis:

Sei T eine Rotation auf (W, H, μ) . Dann gilt für jedes $w' \in W'$:

$$\begin{aligned} \|T^*(w')\| &= \sup_{\substack{x \in H \\ \|x\|=1}} |T^*(w')(x)| = \sup_{\substack{x \in H \\ \|x\|=1}} |w'(T(x))| = \\ &= \sup_{\substack{Tx \in H \\ \|Tx\|=1}} |w' \circ T(x)| = \sup_{\substack{x \in H \\ \|x\|=1}} |w'(x)| = \|w'\|. \end{aligned}$$

2.29. Lemma:

Zu je zwei voneinander verschiedenen Elementen ξ und η aus W' mit gleicher (Hilbertraum-) Norm gibt es eine Rotation T auf (W, H, μ) mit $\eta = T^*(\xi)$.

Beweis: (vgl. GROSS (2), Remark 2.2.; UMEMURA (1), p.33)

Seien $\xi, \eta \in W'$ mit $\xi \neq \eta$ und $\|\xi\| = \|\eta\|$. Dann sind ξ und η insbesondere von Null verschiedene, linear unabhängige Elemente von $H \subseteq W$. Sei K der von ξ und η erzeugte lineare Teilraum von W , $K^\perp := \{h \in H : \bigwedge_{k \in K} (h, k) = 0\}$ das Ortho-

gonalkomplement von K in H , und sei L der Abschluß von $K^\perp$ in W . Wir betrachten auf K das Skalarprodukt $(\cdot, \cdot)$ und wählen eine Orthonormalbasis $\{k_1, k_2\}$ von K ($\subseteq W'$).

Durch die Gleichung $x \longmapsto Q(x) := k_1(x)k_1 + k_2(x)k_2$

wird ein stetiger linearer Operator auf W definiert. Für jedes $x \in H$ gilt: $k_i(x) = (k_i, x)$ ($i = 1, 2$); daher ist Q

die stetige Fortsetzung (auf W) der Orthogonalprojektion

von H auf K . Wir zeigen: W ist die direkte Summe von K und L :

- (a) K und L sind lineare Teilräume von W .
 (b) Der von K und L in W erzeugte lineare Teilraum stimmt mit W überein:

Zu jedem $x \in W$ gibt es ein Netz $(x_\alpha)_\alpha$ in H mit

$\lim x_\alpha = x$. Aus der Stetigkeit von Q folgt: $\lim Q(x_\alpha) = Q(x)$. Da H die direkte Summe von K und $K^\perp$ ist, gilt für jedes α : $x_\alpha - Q(x_\alpha) \in K^\perp$ und somit

$$y := \lim (x_\alpha - Q(x_\alpha)) = x - Q(x) \in L, \text{ d.h.}$$

$$x = Q(x) + y \in K + L.$$

- (c) $K \cap L = \{0\}$:

Zu $x \in K \cap L$ gibt es ein Netz $(x_\alpha)_\alpha$ in $K^\perp$ mit $\lim x_\alpha = x$.

Aus der Stetigkeit von Q folgt:

$$x = Q(x) = Q(\lim x_\alpha) = \lim Q(x_\alpha). \text{ Für jedes } \alpha \text{ liegt } x_\alpha$$

in $K^\perp$ und somit gilt: $Q(x_\alpha) = 0$. Daher ist $x = 0$.

W ist also die direkte Summe von K und L . Wir wählen nun eine unitäre Abbildung $u_K : K \longrightarrow K$ mit $u_K(\eta) = \xi$.

Jedes Element von W läßt sich eindeutig schreiben in der Form $x = x_K + x_L$ mit $x_K \in K$ und $x_L \in L$. Daher läßt sich u_K

durch die Festsetzung $x = x_K + x_L \longmapsto u_K(x_K) + x_L$

fortsetzen zu einem stetigen, linearen Operator T von W auf sich. T ist eine Rotation auf (W, H, μ) , für welche gilt:

$$\bigwedge_{w' \in W'} \bigwedge_{x \in H} \tilde{T}^*(w')(x) = w'(T(x)) = (w', T(x)) =$$

$$= (T^{-1}(w'), x) = T^{-1}(w')(x).$$

Da H als dichter Teilraum von W aufgefaßt werden kann, können wir die Abbildung T^* identifizieren mit der Abbildung $\text{Restr}_W, (\text{Restr}_H T)^{-1}$, und es gilt: $T^*(\xi) = T^{-1}(\xi) = \eta$.

Wir können nun eine Kennzeichnung der (bzgl. μ) rotationsinvarianten Zylindermaße auf W geben:

2.30. Satz: (UMEMURA (1), 16.1.)

Sei (W, H, μ) ein abstrakter Wienertraum, so daß μ die Bedingung (VB) erfüllt.

Ein Zylindermaß P auf W ist genau dann rotationsinvariant (bzgl. μ), wenn eine (von P abhängige) Funktion $\varphi: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$

existiert, so daß das charakteristische Funktional χ_P von P von der folgenden Form ist: $\bigwedge_{w' \in W'} \chi_P(w') = \varphi(\|w'\|^2)$,

d.h. wenn das charakteristische Funktional von P nur von der (Hilbertraum-) Norm $\|\cdot\|$ abhängt.

Beweis:

" $\Leftarrow$ "

Sei P ein Zylindermaß auf W , für welches eine reellwertige Funktion φ auf $\mathbb{R}_+$ existiert mit: $\chi_P(w') = \varphi(\|w'\|^2)$ für jedes $w' \in W'$. Ist T eine Rotation auf (W, H, μ) , so folgt aus Lemma 2.28.:

$$\begin{aligned} \bigwedge_{w' \in W'} \chi_{P_T}(w') &= \int_W \exp(iw'(x)) P_T(dx) = \\ &= \int_W \exp(iw'T(x)) P(dx) = \\ &= \int_W \exp(iT^*(w')(x)) P(dx) = \\ &= \chi_P(T^*(w')) = \varphi(\|T^*w'\|^2) = \varphi(\|w'\|^2) = \\ &= \chi_P(w'). \end{aligned}$$

Somit stimmen die Maße P und P_T überein.

" $\Rightarrow$ "

Ist P ein Zylindermaß auf W , welches invariant ist unter allen Rotationen auf (W, H, μ) , so gilt für jede Rotation T auf (W, H, μ) und für jedes $w' \in W'$: $\chi_{P_T}(w') = \chi_P(w')$, also $\chi_P(T^*(w')) = \chi_P(w')$.

Um nachzuweisen, daß χ_P nur von der Norm $\|\cdot\|$ abhängt,

genügt es zu zeigen, daß zu je zwei voneinander verschiedenen Elementen $\xi, \eta \in W'$ mit $\|\xi\| = \|\eta\|$ eine Rotation T auf (W, H, μ) existiert mit $T^*(\xi) = \eta$. Das wurde aber in Lemma 2.29. gezeigt.

Für jede Zahl $t \in \mathbb{R}_+$ betrachten wir auf dem definierenden Hilbertraum H das Gauß'sche Quasi-Zylindermaß μ_t mit Mittelwert 0 und Varianzparameter t ; μ_t ist eindeutig bestimmt durch die Vorschrift: ist Q eine endlich-dimensionale Projektion in H und ist D eine Borelmenge in $Q(H)$, so gilt:

$$\mu_t(\{x \in H : Q(x) \in D\}) = (2\pi t)^{-k/2} \int_D \exp\left(-\frac{\|x\|^2}{2t}\right) dx,$$

wobei k gleich der Dimension von $Q(H)$ ist und dx das Lebesguemaß auf $Q(H)$ (bzgl. $\|\cdot\|$) bezeichnet.

Für $t \geq 0$ sei m_t das durch die folgende Festsetzung auf W definierte Quasi-Zylindermaß:

$$\begin{aligned} m_t(\{x \in W : (\omega_1'(x), \dots, \omega_n'(x)) \in \Gamma\}) &:= \\ = \mu_t(\{x \in H : (\omega_1'(x), \dots, \omega_n'(x)) \in \Gamma\}) \\ (n \in \mathbb{N}; \omega_1', \dots, \omega_n' \in W', \Gamma \text{ Borelmenge im } \mathbb{R}^n) \end{aligned}$$

2.31. Im folgenden werden wir voraussetzen, daß W quasi-vollständig ist, d.h. jede beschränkte, abgeschlossene Teilmenge von W sei vollständig.

Es ist bekannt, daß unter der Voraussetzung 2.31. jedes der Quasi-Zylindermaße μ_t zu einem Zylindermaß auf W fortgesetzt werden kann (vgl. BADRIKIAN/CHEVET (1), II). Wir bezeichnen für $t \geq 0$ diese (eindeutig bestimmte) Fortsetzung wieder mit m_t . Insbesondere stimmt m_1 mit μ überein.

2.32. Bemerkung:

Die auf die obige Weise erhaltenen Zylindermaße m_t auf W sind rotationsinvariant (bzgl. μ):

Für $t = 0$ ist $m_t = m_0$ das Diracmaß im Nullpunkt, welches trivialerweise rotationsinvariant ist. Sei $t > 0$, und sei $\zeta \in W' \setminus \{0\}$; a und b seien reelle Zahlen mit $a < b$, I bezeichne das abgeschlossene Intervall von a bis b ; F sei der von ζ in H erzeugte lineare Teilraum und Q die Orthogonalprojektion von H auf F . Dann gilt (wegen $(\zeta, x) = (\zeta, Q(x))$ für alle $x \in H$):

$$\begin{aligned} m_t(\{x \in W : \zeta(x) \in I\}) &= \mu_t(\{x \in H : \zeta(x) \in I\}) = \\ &= \mu_t(\{x \in H : (\zeta, x) \in I\}) = \mu_t(\{x \in H : Q(x) \in \\ &\in F \cap \{x \in H : (\zeta, x) \in I\}\}) = \\ &= \mu_t(\{x \in H : Q(x) \in \{x \in F : (\zeta, x) \in I\}\}) = \\ &= \mu_t(\{x \in H : Q(x) \in \{x = \lambda \zeta \in H : \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \|\zeta\|^2 \in I\}\}). \end{aligned}$$

Wir setzen $D = \{x = \lambda \zeta \in H : \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \|\zeta\|^2 \in I\}$ und erhalten:

$$m_t(\{x \in W : \zeta(x) \in I\}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_D \exp\left(-\frac{\|y\|^2}{2t}\right) d^F y,$$

wobei $d^F y$ das Lebesguemaß auf F bezeichnet.

Die Abbildung $F \ni x = \lambda \zeta \longmapsto \lambda \|\zeta\| \in \mathbb{R}$ führt das Maß $d^F y$ in das Lebesguemaß ds auf $\mathbb{R}$ über, und wir erhalten:

$$m_t(\{x \in W : \zeta(x) \in I\}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{\frac{a}{\|\zeta\|}}^{\frac{b}{\|\zeta\|}} \exp\left(-\frac{s^2}{2t}\right) ds =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi t \|\zeta\|^2}} \int_a^b \exp\left(-\frac{s^2}{2t \|\zeta\|^2}\right) ds;$$

m_t ist also das Gaußmaß auf W mit Mittelwert 0 und Varianzparameter t . Insbesondere ist das charakteristische Funktional χ_{m_t} von m_t gegeben durch:

$$\chi_{m_t}(w') = \exp\left(-\frac{t}{2} \|w'\|^2\right) \quad (w' \in W'), \text{ und nach Satz 2.30.}$$

folgt die Rotationsinvarianz von m_t .

Zum Beweis des Hauptsatzes (Satz 2.36.) benötigen wir noch einige Hilfsmittel (vgl. UMEMURA (1), chap.III):

2.33. Definition:

Eine Funktion $\varphi: \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt vollständig monoton, wenn für jede natürliche Zahl n und für beliebige Zahlen $\alpha \geq 0$, $t \geq 0$ gilt:

$$(-1)^n \Delta_{\alpha}^n \varphi(t) := \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \varphi(k\alpha + t) \geq 0.$$

2.34. Lemma: (Satz von BERNSTEIN)

Sei $\varphi: \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ vollständig monoton und rechtsseitig stetig in $t = 0$. Dann existiert ein endliches Borelmaß m auf $\mathbb{R}_+$, so daß für jedes $t \geq 0$ gilt:

$$\varphi(t) = \int_0^{\infty} \exp(-st) m(ds), \text{ d.h. } \varphi \text{ ist die Laplace-}$$

Transformierte von m .

Umgekehrt gilt:

Die Laplace-Transformierte eines jeden endlichen Borelmaßes m auf $\mathbb{R}_+$ ist vollständig monoton.

2.35. Lemma: (vgl. UMEMURA (1); SCHOENBERG (1), Theorem 3)

Sei φ eine reellwertige Funktion auf $\mathbb{R}_+$, und sei die Abbildung $\tilde{\varphi}: W' \longrightarrow \mathbb{R}$ durch die Festsetzung $w' \longmapsto \varphi(\|w'\|^2)$ definiert. Ist $\tilde{\varphi}$ auf W' positiv-definit, so ist φ vollständig monoton.

Wir können nun die folgende Modifikation des oben erwähnten Satzes von UMEMURA zeigen:

2.36. Satz: (vgl. UMEMURA (1), Theorem 21.1.)

Sei (W, H, μ) ein abstrakter Wieneraum. Der lokalkonvexe Hausdorffraum W sei quasi-vollständig, und das Gaußmaß μ erfülle die Varianzbedingung (VB).

Dann gilt:

Ein Zylindermaß P auf W ist genau dann rotationsinvariant (bzgl. μ), wenn ein endliches Borelmaß γ auf $\mathbb{R}_+$ existiert, so daß für jedes $A \in \mathcal{O}_W$ gilt:

$$P(A) = \int_{\mathbb{R}_+} m_t(A) \gamma(dt).$$

Beweis:

(Der Beweis verläuft analog zum Beweis des entsprechenden Satzes von UMEMURA):

" $\Leftarrow$ "

Sei γ ein endliches Borelmaß auf $\mathbb{R}_+$ mit der Eigenschaft:

$$\bigwedge_{A \in \mathcal{O}_W} P(A) = \int_{\mathbb{R}_+} m_t(A) \gamma(dt).$$

Nach Bemerkung 2.23. ist für jedes $t \geq 0$ das Maß m_t rotationsinvariant (bzgl. μ), und somit ist auch P rotationsinvariant (bzgl. μ).

" $\Rightarrow$ "

Sei P ein (bzgl. μ) rotationsinvariantes Zylindermaß auf W .

Dann gibt es eine Funktion $\varphi: \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ mit der Eigen-

schaft: $\bigwedge_{w' \in W'} \chi_p(w') = \varphi(\|w'\|^2)$ (vgl. Satz 2.30.).

Die durch $w' \longmapsto \varphi(\|w'\|^2)$ definierte Abbildung $\tilde{\varphi}$ von W' nach $\mathbb{R}$ ist auf W' positiv-definit, und somit ist (nach Lemma 2.35.) die Abbildung φ vollständig monoton. Aus der Stetigkeit von χ_p folgt die (rechtsseitige) Stetigkeit von φ im Nullpunkt. Daher existiert nach dem Satz von BERNSTEIN (Satz 2.32.) ein endliches Borelmaß $\tilde{\gamma}$ auf $\mathbb{R}_+$, mit der Eigenschaft:

$$\bigwedge_{w' \in W'} \varphi(\|w'\|^2) = \int_{\mathbb{R}_+} \exp(-s\|w'\|^2) \tilde{\nu}(ds).$$

Durch Variablentransformation erhalten wir:

$$\chi_p(w') = \varphi(\|w'\|^2) = \int_{\mathbb{R}_+} \exp(-\frac{t}{2}\|w'\|^2) \nu(dt), \text{ wobei}$$

ν ein endliches Borelmaß auf $\mathbb{R}_+$ ist. Es gilt also:

$$\chi_p(w') = \int_{\mathbb{R}_+} \chi_{m_t}(w') \nu(dt), \text{ und wir erhalten die Behauptung,}$$

da ein (endliches) Maß durch seine Fourier-Transformierte eindeutig bestimmt ist.

2.37. Bemerkung:

Da das Gaußmaß μ rotationsinvariant ist (bezüglich μ), ist jede Rotation auf (W, H, μ) insbesondere ein stark meßbarer, linearer Operator auf W , welcher H auf sich abbildet.

2.38. Beispiel: (vgl. Beispiel I.2.11.)

Sei $\tilde{\Phi}$ ein abzählbar Hilbertscher, nuklearer Hausdorffraum, auf welchem eine stetige Hilbertsche Norm $\|\cdot\|$ existiert. Der Abschluß von $\tilde{\Phi}$ bezüglich $\|\cdot\|$ ist ein Hilbertraum, welchen wir mit H bezeichnen. Sei μ das Gaußmaß (mit Mittelwert 0) auf $\tilde{\Phi}'$, dessen Fourier-Transformierte χ_μ von der folgenden Form ist:

$$\chi_\mu(\xi) = \exp(-\frac{1}{2}\|\xi\|^2) \quad (\xi \in \tilde{\Phi} \equiv \tilde{\Phi}'').$$

Dann ist das Tripel $(\tilde{\Phi}', H, \mu)$ ein abstrakter Wieneraum. Da H ein dichter Teilraum von $\tilde{\Phi}'$ ist, erfüllt μ die Varianzbedingung (VB) (vgl. p. 54). Als Dualraum eines abzählbar Hilbertschen, nuklearen Raumes ist $\tilde{\Phi}'$ ein Montelraum und daher insbesondere quasi-vollständig.

Bei UMEMURA (1) (Def. 16.1.) wird eine Rotation auf $\tilde{\Phi}$ wie folgt definiert:

Ein unitärer Operator u auf H heißt Rotation auf $\tilde{\Phi}$, wenn gilt:

$$(1) \quad u(\tilde{\Phi}) = \tilde{\Phi}$$

(2) $\text{Restr}_{\tilde{\Phi}} u$ ist eine Homöomorphie

Ein Zylindermaß P auf $\tilde{\Phi}'$ heißt $\mathcal{O}$ -invariant, wenn es invariant ist unter allen Rotationen (im Sinne von UMEMURA). Nach Satz 2.30. und UMEMURA (1), Prop.16.1. gilt:

Ein Zylindermaß P auf $\tilde{\Phi}'$ ist genau dann $\mathcal{O}$ -invariant, wenn es rotationsinvariant ist bezüglich μ (vgl. Def. 2.27.II).

Daher folgt aus Satz 2.36.:

Ein Zylindermaß P auf dem Dualraum $\tilde{\Phi}'$ eines abzählbar Hilbertschen, nuklearen Hausdorffraums $\tilde{\Phi}$ ist genau dann $\mathcal{O}$ -invariant, wenn ein endliches Borelmaß γ auf $\mathbb{R}_+$ existiert, so daß für jedes $A \in \mathcal{O}_{\tilde{\Phi}}$ gilt:

$$P(A) = \int_{\mathbb{R}_+} m_t(A) \gamma(dt) \quad (\text{vgl. UMEMURA (1), Prop.21.1.}).$$

Im Gegensatz zu UMEMURA haben wir vorausgesetzt, daß $\tilde{\Phi}$ ein abzählbar Hilbertscher Raum ist. Diese Voraussetzung ist hinreichend dafür, daß $(\tilde{\Phi}', H, \mu)$ ein abstrakter Wienerraum ist. Sie garantiert insbesondere, daß das Gaußmaß μ auf den schwachen Borelmengen von $\tilde{\Phi}'$ definiert ist und die Ausschöpfungseigenschaft (*) erfüllt. Setzen wir $\tilde{\Phi}$ nur als vollständigen, nuklearen Raum voraus (welcher nicht notwendig abzählbar Hilbertsch ist), so ist $(\tilde{\Phi}', H, \mu)$ zwar im allgemeinen kein abstrakter Wienerraum im Sinne der Definition I.2.1., aber wegen der Bemerkung auf p.14 gilt auch für das Tripel $(\tilde{\Phi}', H, \mu)$ die Aussage von Satz 2.36.:

Ein Zylindermaß P auf dem Dualraum $\tilde{\Phi}'$ eines vollständigen, nuklearen Hausdorffraum $\tilde{\Phi}$ ist genau dann $\mathcal{O}$ -invariant, wenn ein endliches Borelmaß γ auf $\mathbb{R}_+$ existiert, so daß für jedes $A \in \mathcal{O}_{\tilde{\Phi}}$ gilt:

$$P(A) = \int_{\mathbb{R}_+} m_t(A) \gamma(dt) \quad (\text{UMEMURA (1), Prop.21.1.}).$$

Literatur:

- N. ARONSZAJN (1) Theory of Reproducing Kernels; Trans. AMS 68 (1950), 337-404
- A. BADRIKIAN/S. CHEVET (1) Questions liées à la théorie des espaces de Wiener; Colloque International "Distributions aléatoires et les Processus gaussiens", Strasbourg, 1973
- S. CAMBANIS/B. S. RAJPUT (1) Some Zero-One Laws for Gaussian Processes; Ann. of Prob. 1 (1973) 304-312
- J. P. R. CHRISTENSEN (1) Borel Structures in Groups and Semi-Groups; Math. Scand. 28 (1971), 124-128
- M. M. DAY (1) Normed linear spaces; Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 21; Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (1973)
- R. M. DUDLEY/J. FELDMAN/L. LE CAM (1) On Seminorms and Probabilities, and Abstract Wiener Spaces; Ann. of Math. 93 (1971), 390-408
- J. FELDMAN (1) Equivalence and Perpendicularity of Gaussian Processes; Pacific Journal Math. 8 (1958), 699-708
- M. GÄTTINGER (1) Abstrakte Wiener Räume und Darstellungssätze vom RIESZschen Typ; Diplomarbeit Erlangen (1972)
- I. M. GELFAND/N. J. VILENKIN (1) Verallgemeinerte Funktionen IV; VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin (1964)
- L. GROSS (1) Abstract Wiener Spaces; Proc. of the Vth Berkeley Symp. on Math. Stat. and Prob. II(1) (1967), 31-42
(2) Potential Theory on Hilbert Space; Journal Functional Analysis 1 (1967), 123-181
- P. R. HALMOS (1) Measure Theory; Van Nostrand Company Inc. New York (1950)
(2) A Hilbert Space Problem Book; Van Nostrand Company Inc. New York (1967)
- G. KALLIANPUR (1) Zero-One Laws for Gaussian Processes; Trans. AMS 149 (1970) 199-211
(2) Abstract Wiener processes and their reproducing kernel Hilbert spaces; Z. Wth. und Verw. Geb. 17 (1971), 113-123

- G.KALLIANPUR/M.NADKARNI (1) Supports of Gaussian Measures; Proc. of the Vth Berkeley Symp. on Math. Stat. and Prob., Vol.II (1970), 375-387; University of California Press, Berkeley and Los Angeles (1972)
- J.KUELBS (1) Abstract Wiener Spaces and Applications to Analysis; Pacific Journal of Math. 31 / 2 (1969), 433-450
- J.KUELBS/V.MANDREKAR (1) The Wiener Closure Theorem for Abstract Wiener Spaces; Proc. AMS 32 (1972), 169-178
- E.MOURIER (1) Random Elements in Linear Spaces; Proc. of the Vth Berkeley Symp. on Math. Stat. and Prob. Vol.II/1 (1965), 43-53
- W.ORLICZ (1) Beiträge zur Theorie der Orthogonalentwicklungen II; Studia Math. 1 (1929), 241-255
- A.PIETSCH (1) Nukleare lokalkonvexe Räume; Akademie-Verlag Berlin (1965)
- Yu.V.PROKHOROV (1) The Method of Characteristic Functionals; Proc. of the IVth Berkeley Symp. on Math. Stat. and Prob., Vol.II (1960), 403-419
- Yu.A.ROZANOV (1) Infinite-dimensional Gaussian Distributions; Proc. of the Steklov Institute of Math. 108 (1968), Izdat. Nauka, Moskau; American Math. Soc., Providence, Rhode Island (1971)
- H.SATO (1) Gaussian Measures on a Banach Space and Abstract Wiener Space; Nagoya Math. J. 36 (1969), 65-83
- I.SEGAL (1) Tensor Algebras over Hilbert Spaces; Trans. AMS 81 (1965), 106-134
- I.J.SCHENBERG (1) Metric Spaces and Completely Monotone Functions; Ann. of Math. 39 (1938), 811-841
- G.E.SHILOV/FAN DYK TIN (1) Integral, Measure and Derivative on Linear Spaces; Izdat. Nauka, Moskau (1967)
- Y.UMEHARA (1) Measures on Infinite Dimensional Vector Spaces; Public. of the Research Inst. for Math. Sc. of Kyoto Univ. 1 (1966), 1-47
- V.S.VARADARAJAN (1) Maße auf topologischen Räumen; Mat. Sbornik t. 55 (97) Nr. 2 (1961)
- N.WIENER (1) Selected Papers; The M.I.T. Press, Cambridge, Mass. (1964), 261-360

Lebenslauf

Am 7. September 1946 wurde ich als zweites Kind des Bundesbahn-Direktors Richard Gättinger und seiner Ehefrau Hanna, geborene Hoffmann, in Brendlorenzen (Kreis Bad Neustadt/Saale) geboren.

Von 1952 an besuchte ich vier Jahre die Volksschule in Schweinfurt und anschließend bis Herbst 1957 die dortige Oberrealschule. Danach war ich Schüler des Martin-Beheim-Gymnasiums in Nürnberg, an welchem ich im Juli 1966 das Abitur ablegte.

Von Oktober 1966 an leistete ich meinen Grundwehrdienst in Dillingen/Donau und in Ulm ab, von dem ich im November 1967 vorzeitig entlassen wurde, um an der Universität Erlangen-Nürnberg das Studium der Mathematik zu beginnen. Ich hörte dort unter anderem Vorlesungen der Professoren Dr. H. Bauer, Dr. D. Kölzow, Dr. U. Krengel, Dr. K. Jacobs, Dr. G. Möbeling und Dr. W. Specht. Im Februar 1970 bestand ich die Diplom-Vorprüfung und im Juli 1972 die Diplom-Hauptprüfung im Fach Mathematik.

Von August 1971 bis März 1974 war ich studentische bzw. wissenschaftliche Hilfskraft am Mathematischen Institut der Universität Erlangen-Nürnberg und erhielt seit September 1972 ein Stipendium nach dem Graduierten-Förderungsgesetz. Seit 1. September 1974 bin ich als Verwalter der Dienstgeschäfte eines wissenschaftlichen Assistenten am Institut für Angewandte Mathematik II beschäftigt.

Erlangen, September 1974

Offsetdruck-Fotodruck

J. Hogl, 8520 Erlangen, Hauptstr. 109 (Nähe Martin-Luther-Platz) Tel. 22990